Übungen (10)

1) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f:
   a) $f(x) = (e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2$ b) $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2$
   c) $f(x) = \left(\frac{e^{-x} + e^x}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ d) $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x} + e^{-x} + 1}{e^x}$
   e) $f(x) = -4^x$ f) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x}$
   g) $f(x) = xe^{-x}$ h) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{-x}$
   i) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ j) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$
   k) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ l) $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$
2) Berechnen Sie die Ableitung von f.
   a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ b) $f(x) = \ln(x^2) + \ln(\frac{1}{x}) - \ln(2x)$
   c) $f(x) = \ln\sqrt{x} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ d) $f(x) = x^2 \ln x$
   e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ f) $f(x) = \ln\frac{3x}{x-1}$
3) a) Berechnen Sie für die Graphen von $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$, $h(x) = 3e^{0,1x}$ jeweils die Tangenten an den Berührstellen -1, 0, 1, 2. Wo schneiden diese Tangenten die x-Achse?
   b) In der Umgebung von 0 unterscheidet sich der Graph von $f(x) = e^x$ nur wenig von der Tangente im Punkt $(0,1)$. Stellen Sie damit eine Näherungsgleichung für e^x auf und berechnen Sie – ohne Taschenrechner – Näherungswerte für $e^{0,002}$, $e^{-0,001}$, $\sqrt[10]{e}$. Sind diese Näherungswerte jeweils größer oder kleiner als der exakte Wert? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Benutzung der (nicht exakten) Werte des Taschenrechners.
   c) Zeigen Sie: Die Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ an der Stelle a schneidet die x-Achse an der Stelle $a - 1$. Welche geometrische Konstruktion für die Tangente an die e-Funktion ergibt sich daraus?
   d) An welchen Stellen sind die Tangenten an den Graphen der Logarithmusfunktion ln parallel zur Geraden mit der Gleichung $2x - 3y + 7 = 0$? Wie lautet jeweils die Gleichung der Tangente?
   e) Bestimmen Sie analog zu c) mit Hilfe einer geeigneten Tangente eine Näherungsformel für $\ln(1+x)$. Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $\ln 1{,}05$, $\ln 0{,}99$, $\ln(1 - \frac{p}{100})$.
4) Führen Sie für die folgenden Funktionen eine möglichst vollständige Funktionsuntersuchung durch und skizzieren Sie den Graphen.
   a) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ c) $f(x) = x(x-1)e^{-x}$
   d) $f(x) = \frac{e^x - 2}{1 + e^x}$ e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ f) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^x}$
   g) $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ h) $f(x) = x - \ln(x+1)$ i) $f(x) = 1 + \ln|x|$
5) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und skizzieren Sie den Graphen. Hinweis: Versuchen Sie nicht auf algebraischem Wege alle Nullstellen zu ermitteln, sondern benutzen Sie die Ergebnisse der Funktionsuntersuchung.
   a) $f(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$ b) $f(x) = e^x - x - 1$ c) $f(x) = x - e^{x-1}$
   d) $f(x) = 2 + 3x - 2^{x+1}$ e) $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{10e^x}$ f) $f(x) = 2^x - \frac{1}{2}x^2 - 2$

Übungen (10) — Lösungen

1) a) $f(x) = (e^x - 1)^2 + (e^x + 1)^2 = 2e^{2x} + 2, \quad f'(x) = 4e^{2x}, \qquad f''(x) = 8e^{2x}.$

b) $f(x) = (e^{-x} + 1)^2 + (e^{-x} - 1)^2 = 2e^{-2x} + 2,$
$f'(x) = -4e^{-2x}, \quad f''(x) = 8e^{-2x}.$

c) $f(x) = \left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2x}+2+e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + e^{-2x}),$
$f'(x) = e^{2x} - e^{-2x}, \quad f''(x) = 2 \cdot (e^{2x} + e^{-2x}) = 4 \cdot f(x).$

d) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x} + e^{-x} + 1}{e^x} = e^{2x} - e^x + e^{-2x} + e^{-x}$
$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 2e^{-2x} - e^{-x}, \quad f''(x) = 4e^{2x} - e^x + 4e^{-2x} + e^{-x}.$

e) $f(x) = -4^x = -(e^{\ln 4})^x = -e^{x \ln 4},$
$f'(x) = -\ln 4 \cdot e^{x \ln 4} = -\ln 4 \cdot 4^x, \qquad f''(x) = -(\ln 4)^2 \cdot 4^x.$

f) $f(x) = (\sqrt{2})^{2x} = (2^{\frac{1}{2}})^{2x} = 2^x,$
$f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x, \qquad f'(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^x.$

g) $f(x) = x \cdot e^{-x},$
$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (-x + 1)e^{-x},$
$f''(x) = -e^{-x} + (-x + 1)(-e^{-x}) = (x - 2) \cdot e^{-x}.$

h) $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot e^{-x},$
$f'(x) = (2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 3) \cdot (-e^{-x}) = (-x^2 + 4x - 5) \cdot e^{-x},$
$f''(x) = (-2x + 4)e^{-x} + (-x^2 + 4x - 5)(-e^{-x}) = (x^2 - 6x + 9)e^{-x} = (x - 3)^2 e^{-x}.$

i) $f(x) = \dfrac{e^x}{x},$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{(e^x(x - 1) + e^x) \cdot x^2 - e^x(x - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{(e^x \cdot x) \cdot x - 2e^x(x - 1)}{x^3} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Alternativ mit Produkt- statt Quotientenregel:
$f(x) = x^{-1}e^x,$

$$f'(x) = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = x^{-2}e^x(-1 + x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2},$$

$$f''(x) = +2x^{-3}e^x - x^{-2}e^x - x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = x^{-3}e^x \cdot (2 - 2x + x^2) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}.$$

j) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x + 1},$

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x})(x + 1) - e^{-x} \cdot 1}{(x + 1)^2} = \frac{e^{-x}(-x - 2)}{(x + 1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(-e^{-x}(-x - 2) + e^{-x} \cdot (-1))(x + 1)^2 - e^{-x}(-x - 2) \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{e^{-x}(x+1)\cdot(x+1) - e^{-x}(-2x-4)}{(x+1)^3} = \frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}.$$

k) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$,

$$f''(x) = \frac{-2e^x(e^x-1)^2 + 2e^x\cdot 2(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4}$$
$$= \frac{-2e^x(e^x-1)+4e^{2x}}{(e^x-1)^3} = \frac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}.$$

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man zuvor den Funktionsterm umformt zu

$$f(x) = \frac{e^x-1+2}{e^x-1} = 1 + 2(e^x-1)^{-1}$$

und dann mit Hilfe der Kettenregel ableitet (vgl. nächste Aufgabe).

l) Erweitert man den gegebenen Funktionsterm mit e^x so erhält man

$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \dfrac{1}{1+e^x} = (1+e^x)^{-1}$.

$f'(x) = -(e^x+1)^{-2}\cdot e^x = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$,

$$f''(x) = 2(e^x+1)^{-3}e^x\cdot e^x - (e^x+1)^{-2}\cdot e^x$$
$$= e^x(e^x+1)^{-3}\cdot(2e^x-(e^x+1)) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}.$$

2) a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1), \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

b) $f(x) = \ln(x^2) + \ln(\dfrac{1}{x}) - \ln(2x) = 2\ln x - \ln x - (\ln 2 + \ln x) = -\ln 2$,

$f'(x) = 0$.

c) $\ln(\sqrt{x}) - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln x = \dfrac{5}{6}\ln x, \quad f'(x) = \dfrac{5}{6x}$.

d) $f(x) = x^2\ln x, \quad f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\dfrac{1}{x} = x(1+2\ln x)$.

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = x^{-1}\cdot\ln x$,

$f'(x) = -x^{-2}\cdot\ln x + x^{-1}\cdot\dfrac{1}{x} = x^{-2}\cdot(-\ln x+1) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

f) $f(x) = \ln\dfrac{3x}{x-1} = \ln 3x - \ln(x-1), \quad f'(x) = \dfrac{1}{3x}\cdot 3 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$.

3) Wir wiederholen die allgemeine Tangentengleichung: Ist f an der Stelle a differenzierbar, dann ist die

$$\boxed{\text{Tangentengleichung:} \quad y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a).}$$

Hierbei ist a die Berührstelle, $(a, f(a))$ der Berührpunkt der Tangente mit dem Graphen.

a) Ergebnisse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	$y=\frac{1}{e}\cdot(x+2)$	$y=x+1$	$y=ex$	$y=e^2(x-1)$
$e^{\frac{x}{2}}$	$y=\frac{1}{2\sqrt{e}}(x+3)$	$y=\frac{1}{2}(x+2)$	$y=\sqrt{e}\cdot(x+1)$	$y=\frac{e}{2}\cdot x$
$3e^{\frac{x}{10}}$	$y=\frac{3}{10\sqrt[10]{e}}\cdot(x+11)$	$y=\frac{3}{10}(x+10)$	$y=\frac{3\sqrt[10]{e}}{10}\cdot(x+9)$	$y=\frac{3\sqrt[5]{e}}{10}\cdot(x+8)$

Die Tangentengleichungen sind in faktorisierter Form angegeben, so dass man die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse unmittelbar ablesen kann.
Schnittstellen der Tangente mit der x-Achse:

$f(x)$	$a=-1$	$a=0$	$a=1$	$a=2$
e^x	-2	-1	0	1
$e^{\frac{x}{2}}$	-3	-2	-1	0
$3e^{\frac{x}{10}}$	-11	-10	-9	-8

Es zeigt sich: Bei $f(x) = e^x$ (1. Zeile) ist die Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse immer gleich $a-1$ (siehe Teil c)), bei $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ist sie immer gleich $a-2$ und bei $f(x) = 3e^{\frac{x}{10}}$ liegt die Schnittstelle immer bei $a-10$. Welche über Aufgabenteil c) hinausgehende Vermutung entnehmen Sie daraus? Beweisen Sie sie wie Teil c).

b) Die Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ an der Stelle $a = 0$ ist gegeben durch die Funktion $t_a(x) = e^a + e^a(x-a) = 1 + x$. Damit ist $f(x) = e^x$ in der Nähe von 0 (in „erster Näherung“) gegeben durch

$$\boxed{e^x \approx 1 + x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

Insbesondere $\sqrt[500]{e} = e^{0{,}002} \approx 1{,}002$, $\frac{1}{\sqrt[1000]{e}} = e^{-0{,}001} \approx 1 - 0{,}001 = 0{,}999$ und $\sqrt[10]{e} = e^{0{,}1} \approx 1{,}1$.

c) Die Tangentenfunktion zu $f(x) = e^x$ ist $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = e^a + e^a(x-a)$, wobei a die Berührstelle ist. Die Nullstelle von t_a ergibt sich zu:

$$t_a(x) = 0 \iff e^a + e^a(x-a) = \iff e^a(x-a+1) = 0 \iff x = a-1\,.$$

Damit ist die Nullstelle der Tangente gleich $a-1$, wenn a die Berührstelle ist. Dies ist genau die behauptete Aussage.
Geometrische Konstruktion der Tangente an den Graphen der e-Funktion: Man fälle das Lot vom Berührpunkt (a, e^a) auf die x-Achse, gehe auf der x-Achse 1 Einheit nach links und zeichne die Gerade durch diesen Punkt $(a-1, 0)$ und den Berührpunkt $b = (a, f(a))$.

Zusatz: Ist $f(x) = c \cdot e^{\frac{x}{k}}$, so ist die Nullstelle der Tangentenfunktion t_a gerade $a - k$:

$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = c \cdot e^{\frac{a}{k}} + \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot (x-a) = \frac{c}{k} \cdot e^{\frac{a}{k}} \cdot \big(k + x - a\big)\,,$$
$$t_a(x) = 0 \iff k + x - a = 0 \iff x = a - k\,.$$

Dies beweist die sich in a) aufdrängende Vermutung.

d) Gesucht sind Tangenten, die parallel zu der gegebenen Geraden verlaufen, d. h. die dieselbe Steigung wie diese Gerade haben. Wir formen die Geradengleichung um:

$$2x - 3y + 7 = 0 \iff 3y = 2x + 7 \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}\,.$$

Damit hat die Gerade die Steigung $m = \frac{2}{3}$ und gesucht sind die Stellen x mit $f'(x) = \frac{2}{3}$. Für $f(x) = \ln x$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{x}$. Also müssen wir die folgende Gleichung lösen:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \iff \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \iff x = \frac{3}{2}\,.$$

Nur an der Stelle $\frac{3}{2}$ hat der natürliche Logarithmus ln eine Tangente parallel zur gegebenen Geraden. Die Tangentengleichung lautet

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) = \ln\frac{3}{2} + \frac{2}{3}(x - \frac{3}{2}) = \frac{2}{3}x - 1 + \ln 3 - \ln 2\,.$$

e) Wir berechnen die Tangentenfunktion zur Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ an der Stelle $a = 0$: Nach der Kettenregel ist $f'(x) = \ln'(1+x)\cdot 1 = \frac{1}{1+x}$ und damit die Tangentenfunktion

$$t(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = \ln(1) + x = x\,.$$

Damit gilt für x nahe bei 0 (in „erster Näherung")

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x \text{ für } x \text{ nahe bei } 0.}$$

oder äquivalent:

$$\boxed{\ln(x) \approx x - 1 \text{ für } x \text{ nahe bei } 1.}$$

Also $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$, $\ln 0{,}99 \approx -0{,}01$ und $\ln(1 - \frac{p}{100}) \approx -\frac{p}{100}$.

4) a) $f(x) = (x^2-1)e^x$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Wegen $e^x > 0$ sind die Nullstellen von f genau die Nullstellen von $x^2 - 1$, also ± 1, und es liegt in beiden Fällen ein Vorzeichenwechsel vor.
Grenzwerte: Der Grenzwert für $x \to \infty$ ist offenbar ∞, während man für den Grenzübergang $x \to -\infty$ den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ benötigt (l'Hospital). Man erhält damit

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x = \lim_{x\to\infty}((-x)^2-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0\,.$$

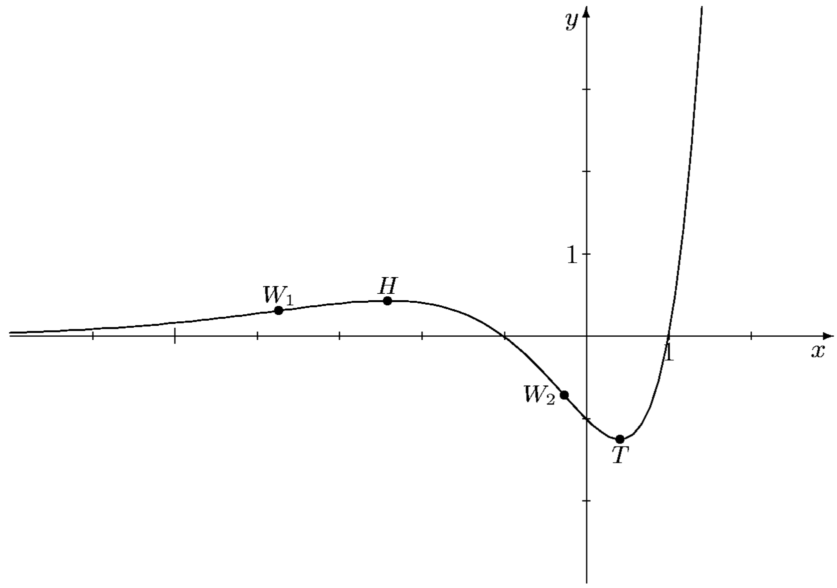
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)\cdot e^x\,,$$
$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-1)e^x = (x^2+4x+1)e^x\,.$$

Extrem- und Wendestellen: Da $e^x > 0$ ist, sind die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die beiden quadratischen Terme gegeben:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3}\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen!), so dass die Funktion f an den Stellen $-1 \pm \sqrt{2}$ Extrem- und an den Stellen $-2 \pm \sqrt{3}$ Wendestellen hat.
Wegen $f'(x) > 0 \iff x^2 + 2x - 1 > 0$ ist f' schließlich monoton steigend, also hat f an der letzten Extremstelle $-1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41$ ein Minimum und bei $-1 - \sqrt{2} \approx\ -2{,}41$ ein Maximum.



b) $f(x) = x^2 e^{-x}$.
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Es ist $f(x) = x^2 e^{-x} \geq 0$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$. Damit ist 0 einzige Nullstelle von f, und zwar ohne Vorzeichenwechsel. Zugleich erkennt man, dass 0 Minimumstelle von f ist (s. u.).
Grenzwerte: Es ist

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} x^2 e^x = \infty\,.$$

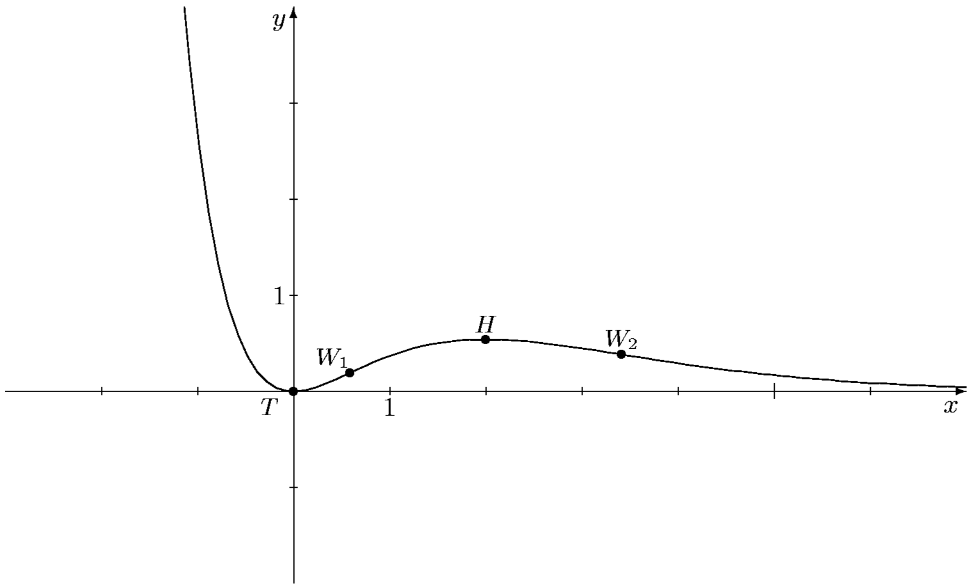
Ableitungen: Mit der Produktregel erhält man

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1) = -(x^2 - 2x) \cdot e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = -(2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}\,.$$

Extrem- und Wendestellen: Wieder sind wegen $e^{-x} > 0$ die Nullstellen und Vorzeichenverteilung von f' und f'' durch die quadratischen Faktoren gegeben:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \ \lor\ x = 2\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{2}\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor (quadratische Terme mit 2 verschiedenen Nullstellen), so dass 0 und 2 Extrem- und $2 \pm \sqrt{2}$ Wendestellen von f sind.
Da 0 Minimumstelle von f ist, ist $+2$ Maximumstelle.



c) Der Definitionsbereich ist wieder $\mathbb{R}$.
Nullstellen sind 0 und 1, beide mit Vorzeichenwechsel. Das Vorzeichen von $f(x)$ ist gleich dem Vorzeichen von $x(x-1)$ (da e^{-x} immer positiv ist), also ist $f(x)$ schließlich positiv.
Die Grenzwerte im Unendlichen sind

$$\lim_{x\to\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{e^x} = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} x(x-1)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-x)(-x-1)e^{x} = \lim_{x\to\infty} x(x+1)e^{x} = \infty\,.$$

Die Ableitungen von $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ sind:

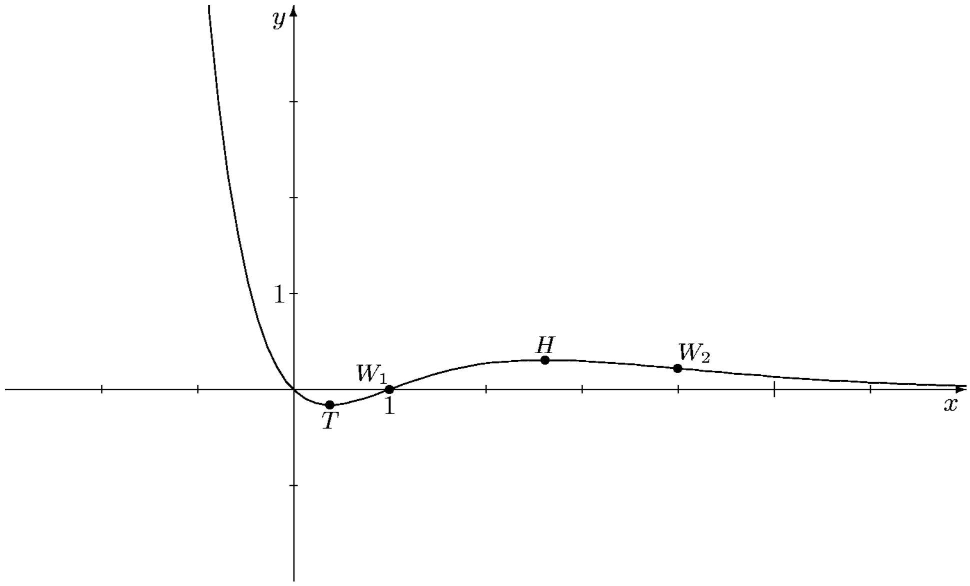
$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} + (x^2-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (-x^2+3x-1)e^{-x}\,,$$
$$f''(x) = (-2x+3)e^{-x} + (-x^2+3x-1)e^{-x}\cdot(-1) = (x^2-5x+4)e^{-x}\,.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen von f' und f'' braucht man nur die quadratischen Faktoren zu untersuchen:

$$f'(x) = 0 \iff x^2-3x+1 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\,,$$
$$f''(x) = 0 \iff x^2-5x+4 = 0 \iff (x-4)(x-1) = 0 \iff x = 1 \;\vee\; x = 4\,.$$

In allen Fällen liegen Vorzeichenwechsel vor, also sind $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ Extrem- und 1 sowie 4 Wendestellen von f.
Das Vorzeichen von $f'(x) = (-x^2+3x-1)e^{-x}$ ist gleich dem Vorzeichen des quadratischen Terms $-x^2+3x-1$, also schließlich negativ. Daher ist die letzte Extremstelle ein Maximum,

die andere hingegen ein Minimum.



d) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{1 + e^x}$.

Definitionsbereich: Wegen $e^x > 0$, also $1 + e^x > 1$ wird der Nenner niemals 0, so dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist: $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$.

Nullstellen: Die Nullstellen der Funktion sind die Nullstellen des Zählers, also

$$f(x) = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2\,.$$

$\ln 2$ ist die einzige Nullstelle von f. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^x und folglich auch $e^x - 2$ monoton wachsen.

Grenzwerte: Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2}{1 + e^x} = \frac{0 - 2}{1 + 0} = -2\,.$$

Für $x \to \infty$ gilt $e^x \to \infty$. Um das Verhalten des Bruches zu studieren, klammern wir in Zähler und Nenner (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(\frac{1}{e^x} + 1)} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1\,.$$

Ableitungen: Mit der Quotientenregel berechnen wir

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - (e^x - 2)e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1 + e^x)^2}$$

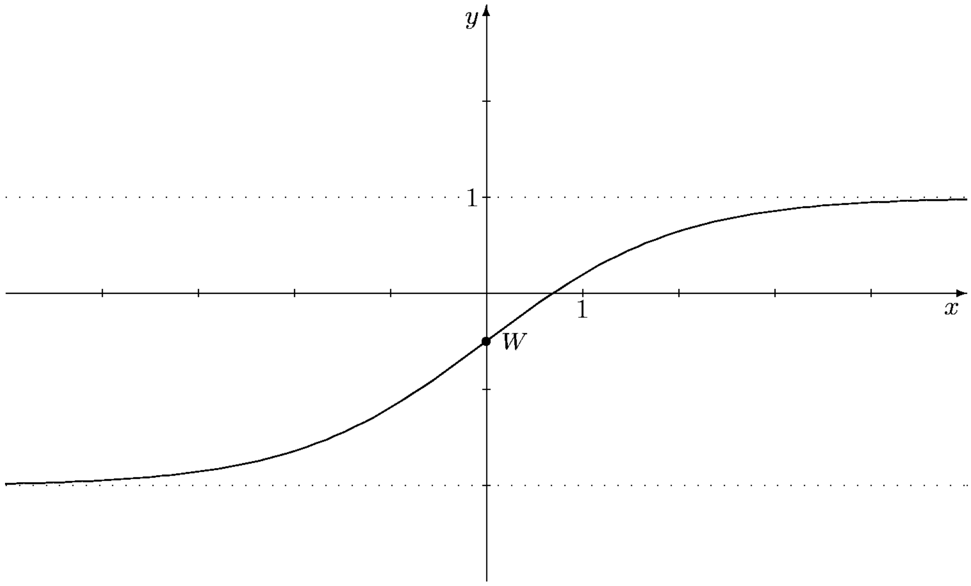
$$f''(x) = \frac{3e^x(1 + e^x)^2 - 3e^x \cdot 2(1 + e^x)e^x}{(1 + e^x)^4} = \frac{3e^x(1 + e^x) - 6e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

$$= \frac{3e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$$

Extremstellen: Da e^x keine Nullstellen hat, hat auch f' keine Nullstellen, f also keine Extremstellen.
Wendestellen: Wegen $e^x \neq 0$ gilt:

$$f''(x) = 0 \iff 3e^x(1-e^x) = 0 \iff 1-e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0\,.$$

Bei $x = 0$ hat f eine Wendestelle, denn f'' ändert dort sein Vorzeichen: Da $e^x > 0$ ist, ist das Vorzeichen von f'' bestimmt durch $1 - e^x$, und $1 - e^x$ ist monoton fallend, ändert also an seiner Nullstelle das Vorzeichen (von + zu −). f wechselt an der Stelle 0 also seine Krümmung von links- zu rechtsgekrümmt.



e) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Definitionsbereich: Es ist $e^x + e^{-x} > 0$, also hat der Nenner von f keine Nullstelle: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Symmetrie: Der Graph von f ist punktsymmetrisch, denn

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -f(x)\,.$$

Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0\,.$$

Einzige Nullstelle ist $x = 0$.
Grenzwerte: Wegen der Punktsymmetrie brauchen wir nur die Grenzwerte für $x \to \infty$ zu bestimmen. Aus den bekannten Grenzwerten $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty}(e^x \pm e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$$

Zähler und Nenner von $f(x)$ konvergieren also gegen ∞. Um den Grenzwert des Quotienten berechnen zu können, klammern wir wieder (den dominierenden Term) e^x aus:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

und erhalten so

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

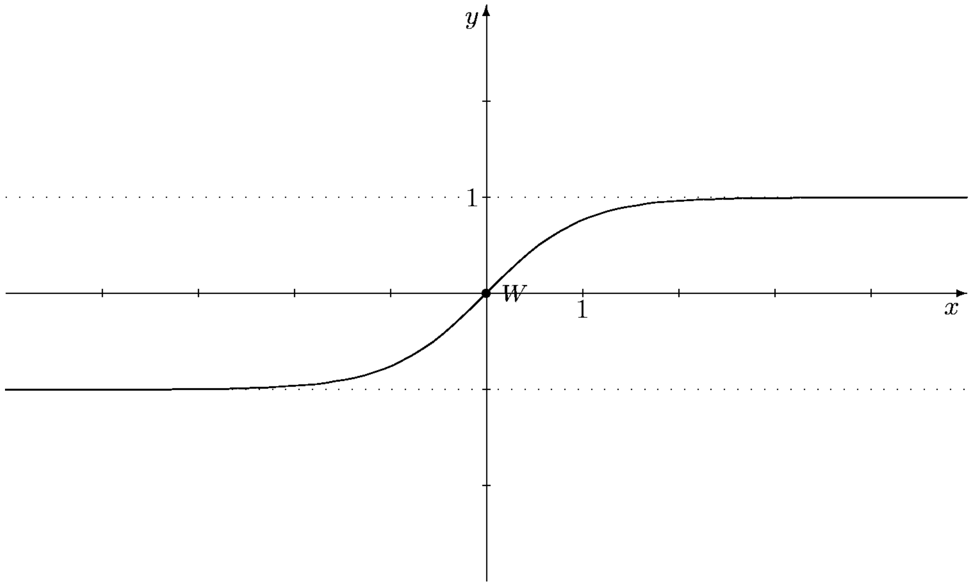
und wegen der Punktsymmetrie $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.
Ableitungen: Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x}\cdot(-1))(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}\cdot(-1))}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}\,, \end{aligned}$$

und ausgehend von $f'(x) = 4\cdot(e^x+e^{-x})^{-2}$ mit der Produkt- und Kettenregel dann

$$f''(x) = -8(e^x+e^{-x})^{-3}\cdot(e^x-e^{-x}) = -\frac{8(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}\,.$$

Extremstellen: f' hat keine Nullstellen, f also keine Extremstellen; genauer: f' ist immer positiv, f also monoton steigend. Dies zeigt zugleich, dass f an seiner Nullstelle $x=0$ das Vorzeichen von $-$ zu $+$ wechselt.
Wendestellen: Da f und f'' bis auf den Faktor -8 denselben Zähler haben, hat auch f'' bei 0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, 0 ist Wendestelle von f.



f) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^x}$.
Definitionsbereich: Wegen $1+e^x>0$ hat der Nenner keine Nullstellen, f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Nullstellen: f hat keine Nullstellen, da der Zähler e^{-x} stets positiv ist.
Grenzwerte: Für $x\to\infty$ strebt der Zähler von f gegen 0 und der Nenner gegen ∞, der Bruch also gegen 0: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
Für $x\to-\infty$ strebt der Zähler gegen ∞ und der Nenner gegen 1, der Bruch also gegen

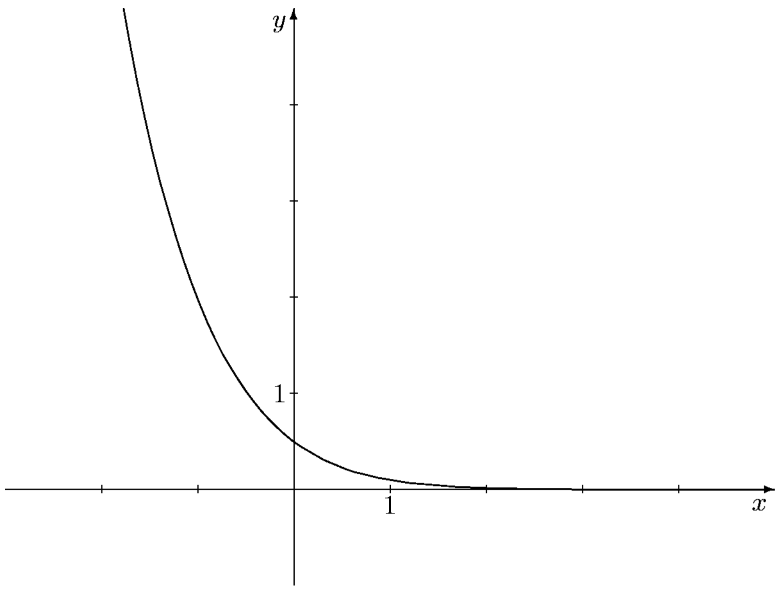
∞: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.
Hinweis: Indem man den Bruchterm für $f(x)$ mit e^x erweitert, erhält man die folgende etwas übersichtlichere Darstellung

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{1}{e^x(1+e^x)}\,.$$

Aus ihr entnimmt man unmittelbar, dass f keine Nullstellen hat und dass die Grenzwerte von f $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ sind.
Ableitungen: Mit der Quotientenregel berechnen wir (unbedingt kürzen!)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^{-x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x}-2}{(1+e^x)^2}\,,\\
f''(x) &= \frac{e^{-x}(1+e^x)^2 + (e^{-x}+2)\cdot 2(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^{-x}(1+e^x) + 2e^x(e^{-x}+2)}{(1+e^x)^3}\\
&= \frac{e^{-x}+3+4e^x}{(1+e^x)^3}\,.
\end{aligned}$$

Extremstellen: Der Term für $f'(x)$ zeigt, dass f' nur negative Werte hat, f also monoton fällt. Insbesondere gibt es keine Extremstellen.
Wendestellen: Genauso erkennt man, dass f'' nur positive Werte hat, f also stets linksgekrümmt ist und insbesondere keine Wendestelle hat.



g) $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$.
Der Definitionsbereich ist $\mathbb{D}(f) =]0,\infty[$.
Die Bestimmung der Nullstellen ist nicht mit einfachen algebraischen Mitteln möglich, da die Unbekannte *im* Logarithmus und außerhalb auftritt. Die nachfolgende Funktionsuntersuchung erlaubt aber dennoch die Bestimmung der Nullstellen (s.u.).
$f'(x) = \frac{1}{x} - x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1$.
Nullstellen von f':

$$\frac{1}{x} - x = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1\,.$$

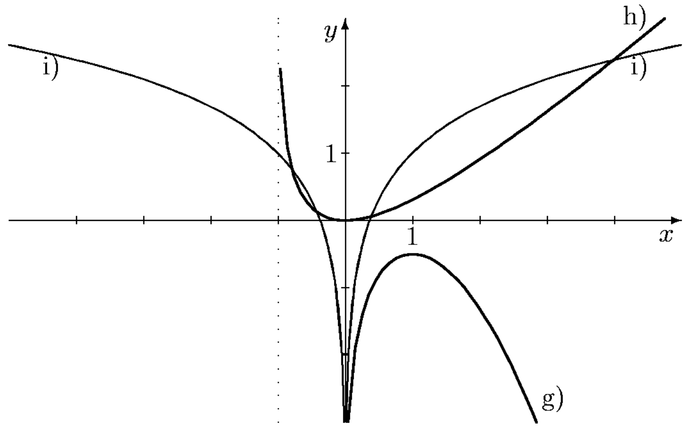
Aber Achtung: Mit f ist auch f' nur auf $]0,\infty[$ definiert, -1 gehört also nicht zum Definitionsbereich von f'. Daher ist nur $+1$ Nullstelle von f'. Wegen $f''(1) = -2 < 0$ liegt ein Maximum vor. Der Wert des Maximums beträgt $f(1) = -\frac{1}{2}$.
Nullstellen von f'' gibt es nicht, also auch keine Wendestellen.
Da der einzige Hochpunkt von f $H = (1, -\frac{1}{2})$ unterhalb der x-Achse liegt, hat f keine Nullstelle.
Wir bestimmen die Randgrenzwerte

$$\lim_{x\to 0}(\ln x - \frac{1}{2}x^2) = \lim_{x\to 0}\ln x = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to\infty}(\ln x - \frac{1}{2}x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2(\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} - \frac{1}{2}) = -\infty\,.$$

h) Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) =]-1,\infty[$.
Wieder ist Bestimmung der Nullstellen nicht mit einfachen algebraischen Mitteln möglich, da die Unbekannte *im* Logarithmus und außerhalb auftritt. Die nachfolgende Funktionsuntersuchung erlaubt aber dennoch die Bestimmung der Nullstellen (s.u.).
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
f' hat einzige Nullstelle bei $x = 0$. $f''(0) = 1 > 0$, also liegt ein Minimum vor; der Wert des Minimums ist $f(0) = 0$.
f'' hat keine Nullstellen, f also keine Wendestellen.
Da f nur einen Extrempunkt hat und dieser auf der x-Achse liegt, gibt es nur die eine Nullstelle 0.
Die Randgrenzwerte sind: $\lim_{x\to -1}(x - \underbrace{\ln(x+1)}_{\to -\infty}) = \infty$ und

$$\lim_{x\to\infty}(x - \ln(x+1)) = \lim_{x\to\infty}(x+1)(\underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0}) = \infty\,.$$

i) Der Definitionsbereich $\mathbb{D}(f) = \{x \mid |x| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ zerfällt in zwei Teilintervalle: $]-\infty, 0[$ und $]0,\infty[$. Man untersucht dann die Funktion auf den beiden Teilstücken getrennt. Wegen des Betrages in der Definitionsformel für $f(x)$ gilt $f(-x) = f(x)$, also ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse. Daher braucht man nur den Verlauf von f über $]0,\infty[$ zu studieren. Dort gilt $f(x) = 1 + \ln(x)$. Der Graph von f entsteht in diesem Bereich durch Verschiebung des bekannten Graphen von $\ln(x)$ um 1 nach oben.
Skizzen:



5) a) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff e^{2x-1} = e^{x+1} \iff 2x - 1 = x + 1 \iff x = 2\,.$$

Um gleichzeitig auch einen evtl. Vorzeichenwechsel erkennen zu können, benutzt man am besten die folgende faktorisierte Form von $f(x)$:

$$f(x) = e^{x+1}(e^{x-2} - 1) = 0 \iff e^{x-2} = 1 \iff x - 2 = 0\,.$$

Da der Faktor e^{x+1} stets positiv ist und $e^{x-2} - 1$ monoton steigt, muss f an seiner Nullstelle das Vorzeichen wechseln, und zwar von $-$ zu $+$. (Diese Faktorisierung wird auch im Folgenden nützlich sein.)
Grenzwerte: Für $x \to \infty$ streben e^{2x-1} und e^{x+1} gegen ∞, es ist dann aber nicht klar, wohin die Differenz $e^{2x-1} - e^{x+1}$ konvergiert. Um das zu erkennen, benutzen wir wieder die obige Faktorisierung und erhalten für $x \to \infty$:

$$f(x) = \underbrace{e^{x+1}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\underbrace{e^{x-2}}_{\to\infty} - 1)}_{\to\infty} \to \infty\,.$$

Der Grenzwert für $x \to -\infty$ ergibt sich einfacher:

$$f(x) = \underbrace{e^{2x-1}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x+1}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{für } x \to -\infty\,.$$

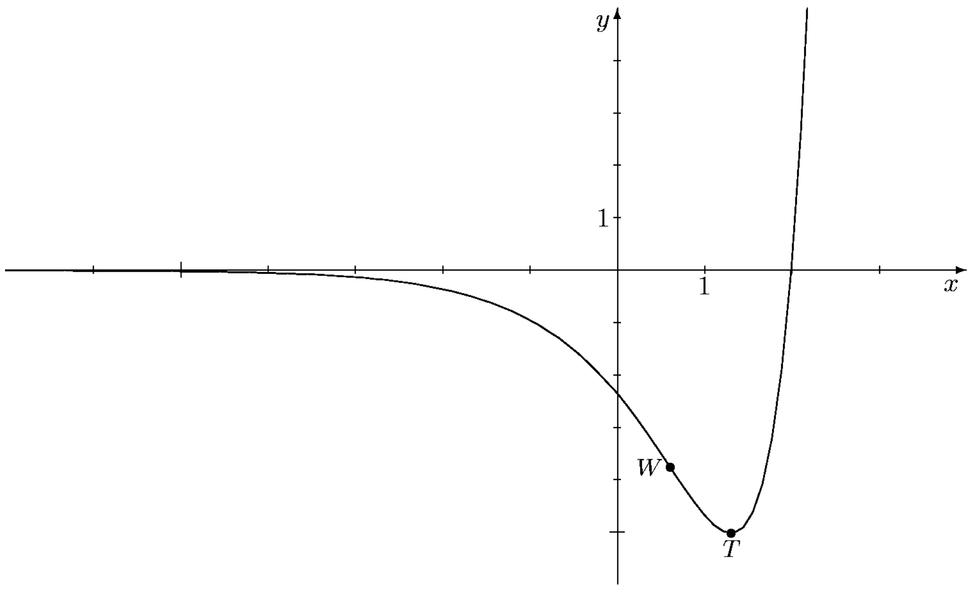
Ableitungen:
$f'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (2e^{x-2} - 1)$,
$f''(x) = 4e^{2x-1} - e^{x+1} = e^{x+1} \cdot (4e^{x-2} - 1)$.
Als Nullstellen der Ableitungen findet man

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2e^{x-2} = 1 \iff e^{x-2} = \frac{1}{2} \\ &\iff x - 2 = -\ln 2 \iff x = 2 - \ln 2 \approx 1{,}31\,, \\ f''(x) = 0 &\iff 4e^{2x-1} = 1 \iff x - 2 = -\ln 4 \iff x = 2 - \ln 4 \approx 0{,}61 \end{aligned}$$

In beiden Fällen liegt ein Vorzeichenwechsel vor, denn der Faktor $2e^{2x-1}-1$ bzw. $4e^{2x-1}-1$ ist monoton wachsend; es findet also jeweils ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ statt. Die Extremstelle $2 - \ln 2$ ist somit eine Minimumstelle. Der Berechnung der y-Koordinaten von Tief- und Wendepunkt sind gute Übungen zum Rechnen mit Logarithmen und Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(2 - \ln 2) &= e^{3-2\ln 2} - e^{3-\ln 2} = \frac{e^3}{(e^{\ln 2})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 2}} = e^3 \cdot (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = -\frac{e^3}{4}\,, \\ f(2 - \ln 4) &= e^{3-2\ln 4} - e^{3-\ln 4} = \frac{e^3}{(e^{\ln 4})^2} - \frac{e^3}{e^{\ln 4}} = e^3 \cdot (\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4}) = -\frac{3e^3}{16}\,, \end{aligned}$$

Damit ist $T = (2 - \ln 2\,, -\frac{e^3}{4}) \approx (1{,}31\,;\ -5{,}02)$ der Tief- und $W = (2 - \ln 4\,, -\frac{3e^3}{16}) \approx (0{,}61\,;\ -3{,}77)$ der Wendepunkt von f.



b) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Bei der Aufstellung einer Wertetafel oder genauem Hinsehen erkennt man, dass $x = 0$ eine Nullstelle von f ist: $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Die weitere Funktionsuntersuchung wird zeigen, dass 0 die einzige Nullstelle ist und dort kein Vorzeichenwechsel vorliegt. [Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung $e^x = x + 1$ etwa durch Logarithmieren ist nicht möglich, da die Unbekannte nicht nur im Exponten, sondern auch als Basis auftritt. Solche Gleichungen sind nur bei Vorliegen zusätzlicher Besonderheiten exakt lösbar, ansonsten müssen Näherungsverfahren wie etwa das Newton-Verfahren angewandt werden.]
Grenzwerte:

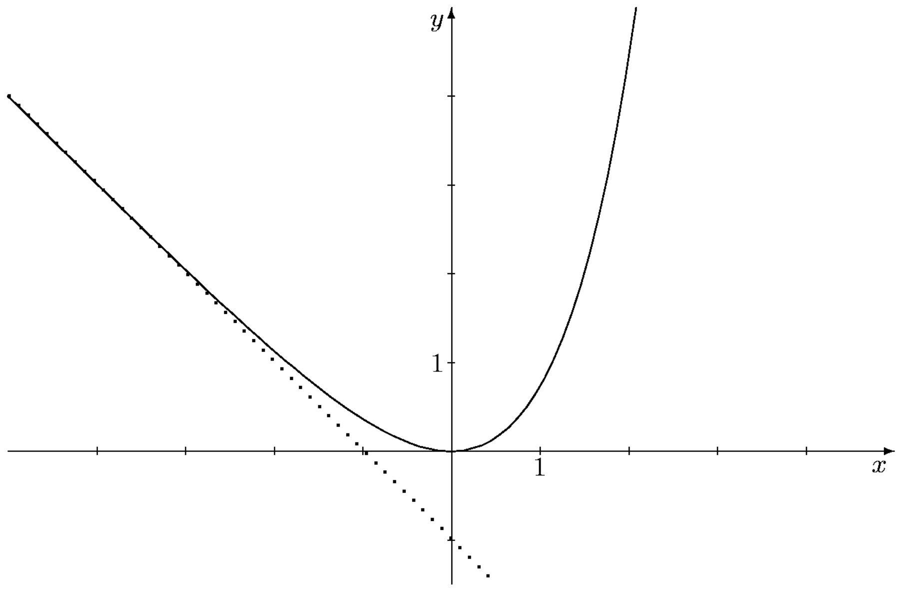
$$\lim_{x\to\infty}(e^x - x - 1) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} \cdot \Big(1 - \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}\Big) = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{\to 0} - x - 1) = +\infty\,.$$

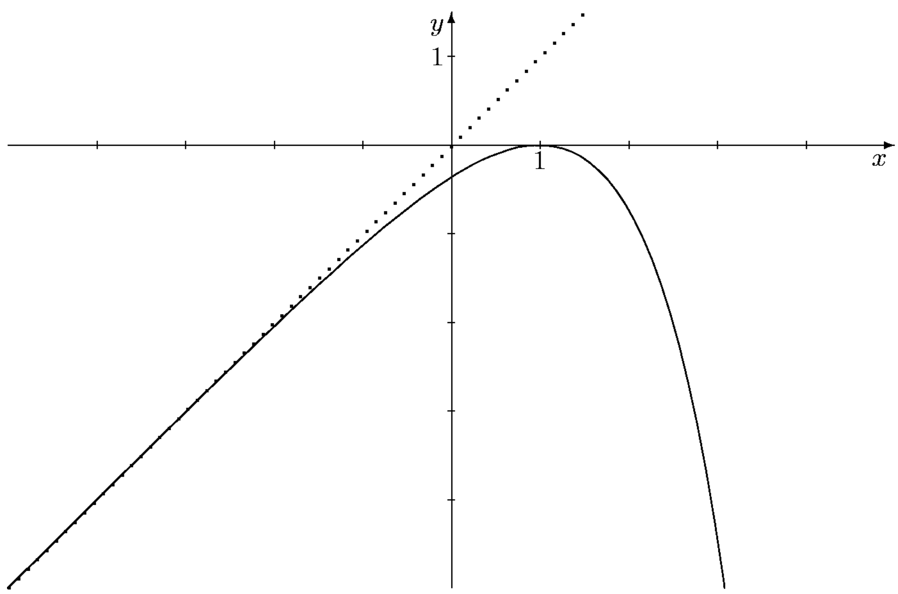
Die letzte Berechnung zeigt zugleich, dass sich $f(x)$ beim Grenzübergang $x \to -\infty$ immer weniger von $a(x) = -x - 1$ unterscheidet:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - a(x)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,.$$

Der Graph von a ist eine Asymptote für f beim Grenzübergang $x \to -\infty$.
Ableitungen: $f'(x) = e^x - 1$, $\quad f''(x) = e^x$. Damit ist f'' stets positiv, der Graph von f also linksgekrümmt. Die einzige Nullstelle von f' ist $x = 0$: $f(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$. Wegen der Linkskrümmung hat f bei 0 ein Minimum. Dies zeigt zugleich die obigen Behauptungen über die Nullstellen von f.



c) Diese Aufgabe lässt sich auf Teil b) zurückführen, denn ersetzt man in der hier gegebenen Funktion x durch $x+1$, so erhält man $f(x+1) = x+1-e^{x+1-1} = -(e^x - x - 1)$, und dies ist genau das Negative der in b) gegebenen Funktion. Dies bedeutet, dass der hier gesuchte Graph von f aus dem in b) bestimmten Graphen durch Verschiebung um 1 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse entsteht. Alle Ergebnisse von b) lassen sich dann unmittelbar hierauf übertragen.
Skizze:



Hier nun eine Funktionsuntersuchung nach üblichem Muster, z. B. weil man diesen Zusammenhang nicht gesehen hat oder weil man nicht zuvor b) behandelt hat oder auch nur zur Übung:
Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Eine Nullstelle von f ist bei $x=1$ zu finden. Ob es weitere gibt, entscheiden wir aufgrund der nachfolgenden Funktionsuntersuchung, insbesondere der Monotonie.

Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{x}_{\to-\infty}-\underbrace{e^{x-1}}_{\to 0})=-\infty\,,$$
$$\lim_{x\to\infty}(x-e^{x-1})=\lim_{x\to\infty}\underbrace{e^{x-1}}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\underbrace{\frac{x}{e^{x-1}}}_{\to 0}-1}_{\to -1})=-\infty\,.$$

Die erste Grenzwertberechnung zeigt, das durch $a(x)=x$ eine Asymptote von f für $x\to-\infty$ gegeben ist: $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-a(x))=\lim_{x\to-\infty}(-e^{x-1})=0$. Der Graph von f schmiegt sich für $x\to-\infty$ dem Graphen von a an.
Ableitungen:
$f(x)=x-e^{x-1}$, $f'(x)=1-e^{x-1}$, $f''(x)=-e^{x-1}$.
Man erkennt, dass f'' nur negative Werte hat, f also rechtsgekrümmt ist. f' hat nur eine Nullstelle:

$$f'(x)=0\iff e^{x-1}=1\iff x-1=\ln 1=0\iff x=1\,.$$

Da f rechtsgekrümmt ist, hat f bei 1 ein Maximum. Dies ist zugleich die Nullstelle von f. Also kann f keine weiteren Nullstellen haben; alle anderen Werte von f sind negativ. (Skizze siehe oben.)
d) Definitionsbereich ist wieder ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die Nullstellengleichung $2+3x=2^{x+1}$ ist algebraisch nicht angreifbar, da die Unbekannte x zugleich im Exponenten und in der Basis auftritt. Man findet in einer einfachen Wertetabelle aber, dass $x=0$ und $x=2$ Nullstellen von f sind. Dass es keine weiteren Nullstellen geben kann, zeigt die nachfolgende Funktionsuntersuchung.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{2+3x}_{\to-\infty}-\underbrace{2^{x+1}}_{\to 0})=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\underbrace{2^{x+1}}_{\to\infty}\cdot(\underbrace{\frac{2+3x}{2^{x+1}}}_{\to 0}-1)=-\infty\,.$$

Die Berechnung des ersten Grenzwertes zeigt zugleich, dass durch $a(x)=2+3x$ eine Asymptote von f für $x\to-\infty$ gegeben ist.
Ableitungen: Wir stellen f durch die e-Funktion dar:

$$\begin{aligned}
f(x)&=2+3x-2^{x+1}=2+3x-(e^{\ln 2})^{x+1}=2+3x-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\,,\\
f'(x)&=3-e^{\ln 2\cdot(x+1)}\cdot\ln 2=3-2^{x+1}\cdot\ln 2\,,\\
f''(x)&=-2^{x+1}\cdot\ln^2 2\,.
\end{aligned}$$

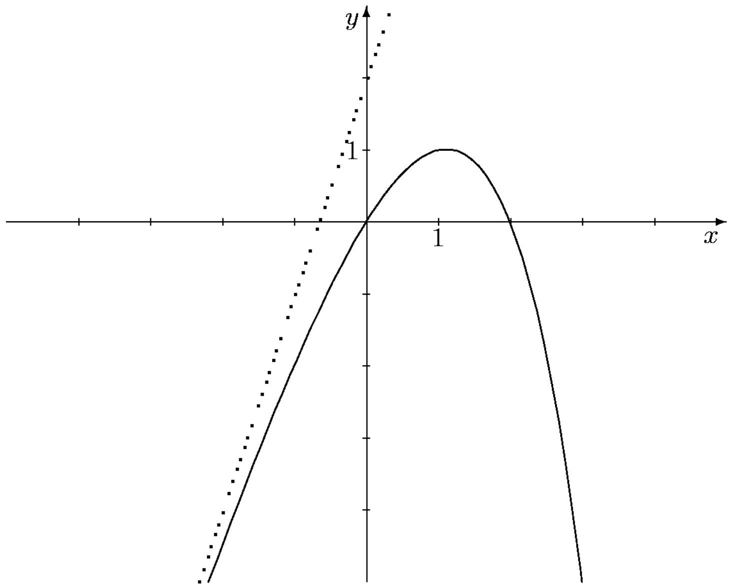
f'' hat nur negative Werte, also ist f stets rechtsgekrümmt. Wir bestimmen die Nullstellen von f':

$$\begin{aligned}
f'(x)=0&\iff\frac{3}{\ln 2}=e^{\ln 2\cdot(x+1)}\iff\ln 3-\ln(\ln 2)=\ln 2\cdot(x+1)\\
&\iff x=\frac{\ln 3-\ln(\ln 2)}{\ln 2}-1\approx 1{,}11\,.
\end{aligned}$$

Wegen der Rechtskrümmung hat f an dieser Stelle ein Maximum. Da dieses Maximum das einzige Extremum von f ist, ist f vor dem Maximum monoton wachsend und dahinter monoton fallend, kann also nur 2 Nullstellen besitzen: Außer den beiden bereits angegebenen Nullstellen gibt es somit keine weiteren. Zur Kontrolle: Der maximale Funktionswert von f ist positiv:

$$f\left(\frac{\ln 3 - \ln(\ln 2)}{\ln 2} - 1\right) \approx 1{,}01\,.$$

Skizze:



e) Der <u>Definitionsbereich</u> ist ganz $\mathbb{R}$, da der Nenner nie 0 wird.
<u>Nullstellen:</u> $f(x) = 0 \iff e^{3x} = 1 \iff x = 0$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da e^{3x} und also auch $e^{3x} - 1$ monoton wächst.
<u>Grenzwerte:</u> $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (e^{2x} - e^{-x})$. Also

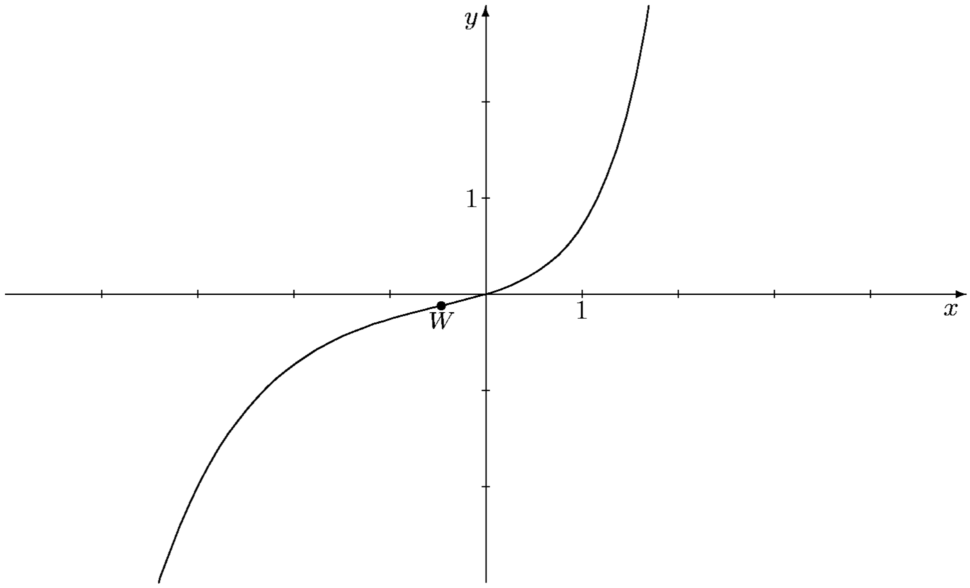
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{10} \cdot (\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-x}}_{\to\infty}) = -\infty\,.$$

<u>Ableitungen:</u> $f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (2e^{2x} + e^{-x})$, $f''(x) = \frac{1}{10} \cdot (4e^{2x} - e^{-x})$. Offenbar nimmt f' nur positive Werte an: f ist monoton steigend.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff \frac{1}{10e^x} \cdot (4e^{3x} - 1) = 0 \iff e^{3x} = \frac{1}{4} \iff 3x = -\ln 4 \\ &\iff x = -\frac{1}{3} \cdot \ln 4 = -\frac{2}{3} \cdot \ln 2 \approx -0{,}46\,. \end{aligned}$$

Damit hat f'' nur eine Nullstelle; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $4e^{3x}$ monoton wächst. Also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Skizze:



f) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Eine algebraische Lösung der Nullstellengleichung ist nicht möglich, aber man findet $x = 2$ als eine erste Nullstelle. Ob es weitere gibt, entscheiden wir nach der Funktionsuntersuchung.
Grenzwerte: Es ist $f(x) = 2^x \cdot (1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2^x} - \frac{2}{2^x}) = 2^x \cdot (1 - \frac{x^2}{2^{x+1}} - \frac{1}{2^{x-1}})$, also:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{2^x}_{\to\infty} \cdot (1 - \underbrace{\frac{x^2}{2^{x+1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2^{x-1}}}_{\to 0}) = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{2^x}_{\to 0} - \underbrace{0{,}5 \cdot x^2}_{\to\infty} - 2) = -\infty\,.$$

Ableitungen: $f(x) = 2^x - \frac{x^2}{2} - 2 = e^{x\ln 2} - \frac{x^2}{2} - 2$, $f'(x) = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2 - x = 2^x \cdot \ln 2 - x$, $f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 - 1$. Wir untersuchen auf Nullstellen:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 2^x = \frac{1}{\ln^2 2} \iff x \ln 2 = -\ln(\ln^2 2) = -2\ln(\ln 2)) \\ &\iff x = -\frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 1{,}06\,. \end{aligned}$$

f'' wechselt an dieser Stelle sein Vorzeichen von $-$ zu $+$ ($2^x \cdot \ln^2 2$ wächst monoton), also liegt hier eine Wendestelle von f. Diese ist zugleich eine Extremstelle von f' (!), und zwar eine Minimalstelle (da f' vorher fällt und hinterher steigt). Also sind alle Werte von f' größer oder gleich dem Wert von f' an dieser Minimalstelle

$$\begin{aligned} f'(-\frac{2\ln(\ln(2)}{\ln 2}) &= \ln 2 \cdot e^{-2\ln(\ln 2)} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln^2 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{2\ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0{,}39 > 0\,. \end{aligned}$$

Alle Werte von f' sind folglich positiv und f ist monoton wachsend. Damit kann f nur die bereits oben gefundene Nullstelle $x = 2$ haben.
Skizze: