Übungen (11)

1) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und skizzieren Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse die Graphen.
   a) $f(x) = 4xe^{-x}$ b) $f(x) = x^2e^x$ c) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$
   d) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$ f) $f(x) = (x^3 - 4)e^x$
2) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und bestimmen Sie den Graphen.
   a) $f(x) = \ln x - x$ b) $f(x) = \ln x + x^2 - 1$ c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{7-x}\right)$
   d) $f(x) = x^2(\ln x - 2)$ e) $f(x) = 3x - 2x \ln x$ f) $f(x) = x \ln x - \dfrac{x^2}{2}$
3) Bestimmen Sie alle ganzrationalen Funktionen g zweiten Grades, welche den Graphen von f mit
   $$\text{a) } f(x) = e^x \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b) } f(x) = e^{-x}$$
   im Punkt $(0, 1)$ berühren.
   Zeichnen Sie eine nach oben und eine nach unten geöffnete berührende Parabel zusammen mit dem Graphen von f in ein Koordinatensystem.
4) Lösen Sie die vorangehende Aufgabe für die Funktionen
   $$\text{a) } f(x) = \ln(x + 1) \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b) } f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
   und den Berührpunkt $(0, 0)$.
5) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln x$.
   a) Welche Tangente an den Graphen von f verläuft durch den Koordinatenursprung?
   b) Was ergibt sich entsprechend für $\ln(x + 1)$?
6) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x$.
   a) Welche Tangenten an den Graphen von f verlaufen durch den Koordinatenursprung?
   b) Was ergibt sich für die Funktionenscharen $f(x) = e^{x-k}$ bzw. $f(x) = e^{kx}$?
7) Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x$.
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (1, e)$ des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen von f und die Gerade g.
   b) An welcher Stelle im Intervall $[0, 1]$ ist der vertikale Abstand zwischen beiden Graphen maximal? Wie groß ist dieser maximale Abstand?
8) Gegeben ist die Funktion f mit a) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$ bzw. b) $f(x) = e^{-x}$.
   Welches Rechteck mit achsenparallelen Seiten zwischen dem Graphen von f und den Koordinatenachsen im I. Quadranten hat maximalen Flächeninhalt?
9) Gegeben ist die Funktion
   $$\text{a) } f(x) = e^{x+1} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b) } f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$$
   Welcher Punkt des Graphen von f hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand?

Übungen (11) — Lösungen

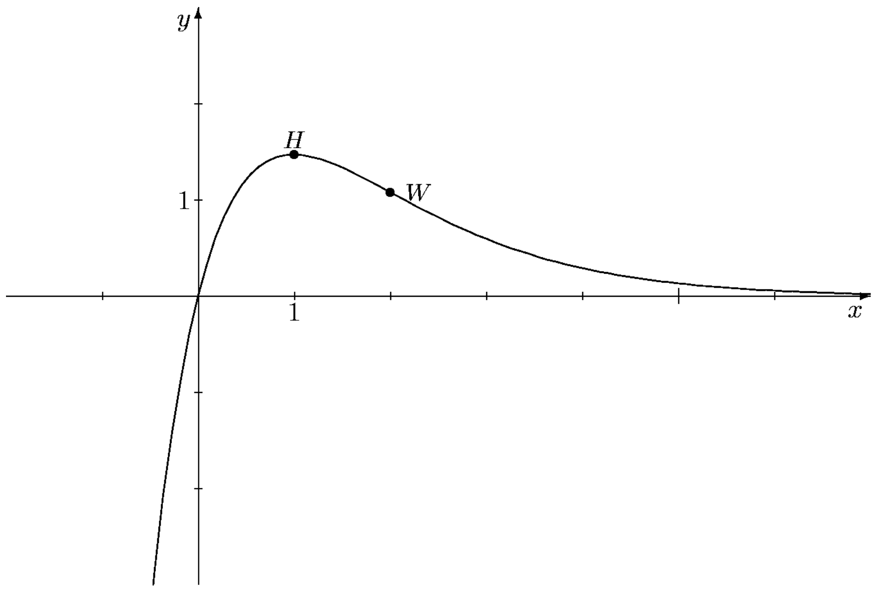
1) a) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: Die einzige Nullstelle ist 0, mit Vorzeichenwechsel.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{e^x} = 0 \text{ (l'Hospital)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} 4xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-\underbrace{4x}_{\to\infty}\underbrace{e^x}_{\to\infty}) = -\infty\,.$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cdot e^{-x} + 4x\cdot(-e^{-x}) = 4(1-x)e^{-x}\,, \\ f''(x) &= 4\cdot\big((-1)\cdot e^{-x} + (1-x)\cdot(-e^{-x})\big) = 4(x-2)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind unmittelbar ablesbar: f' hat nur die Nullstelle 1, mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, also ist 1 eine Maximalstelle von f. f'' hat nur die Nullstelle 2, mit Vorzeichenwechsel, also eine Wendestelle von f. Der Hochpunkt ist $H = (1, f(1)) = (1, \frac{4}{e}) \approx (1; 1{,}47)$, der Wendepunkt ist $W = (2, f(2)) = (2, \frac{8}{e^2}) \approx (2; 1{,}08)$.



b) Siehe Übung(10), Aufgabe 4) b): Dort wurde die Funktion x^2e^{-x} untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

c) Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen sind -1 und -2, denn $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ (Vieta!). An beiden Stellen wechselt f sein Vorzeichen.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+3x+2)e^{-x} = 0 \text{ (l'Hospital)}, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2+3x+2)e^{-x} = \infty\,.$$

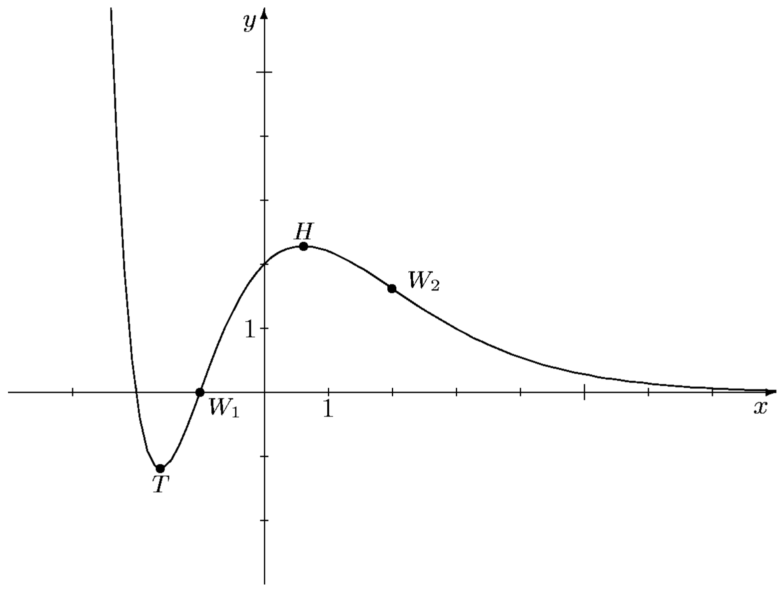
Ableitungen und deren Nullstellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x+2)(-e^{-x}) = (-x^2-x+1)e^{-x}\,, \\ f''(x) &= (-2x-1)e^{-x} + (-x^2-x+1)(-e^{-x}) = (x^2-x-2)e^{-x}\,, \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \iff x^2+x-1=0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\,,$$

$$f''(x)=0 \iff x^2-x-2=0 \iff (x+1)(x-2)=0 \iff x=-1 \ \vee\ x=2\,.$$

An allen Nullstellen liegt ein Vorzeichenwechsel der jeweiligen Funktion vor, also sind -1 und 2 Wendestellen von f und $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ Extremstellen von f. Das Vorzeichen von f' ist das Vorzeichen von $-x^2-x+1$ ($e^{-x}>0!$), also ist f' schließlich negativ, f schließlich fallend und die größte Extremstelle eine Maximalstelle, die andere eine Minimalstelle. Damit liegt ein Hochpunkt bei $H \approx (0{,}62; 2{,}28)$ und ein Tiefpunkt bei $T = (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, f(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})) \approx (-1{,}62; -1{,}19)$. Schließlich sind die Wendepunkte $W_1 = (-1; 0)$ und $W_2 = (2, \frac{12}{e^2}) \approx (2; 1{,}62)$.



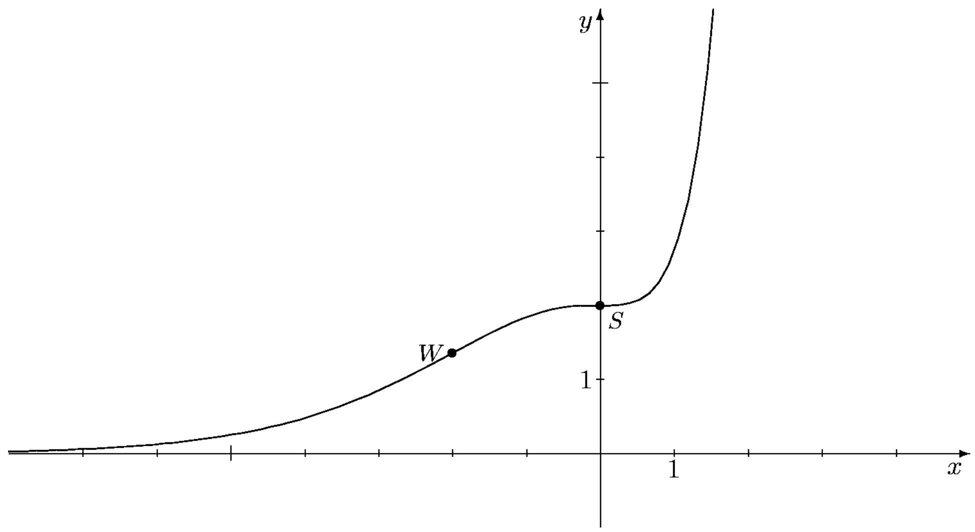
d) Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen existieren nicht, da die quadratische Gleichung $x^2-2x+2=0$ keine Lösungen hat.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2-2x+2)e^x = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (x^2-2x+2)e^x = 0 \text{ (l'Hospital)}\,.$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2e^x\,, \\ f'(x) &= 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x\,. \end{aligned}$$

f' hat nur eine Nullstelle, bei 0, ohne Vorzeichenwechsel; f hat also keine Extremstellen, aber eine Sattelstelle bei 0.
f'' hat die beiden Nullstellen 0 und -2, beide mit Vorzeichenwechsel, also neben der Sattelstelle 0 eine weitere Wendestelle bei -2.



e) Siehe Übung (10) Aufgabe 4) a): Dort wurde die Funktion $(x^2-1)e^x$ untersucht. Die Graphen sind spiegelbildlich zueinander bzgl. der y-Achse.

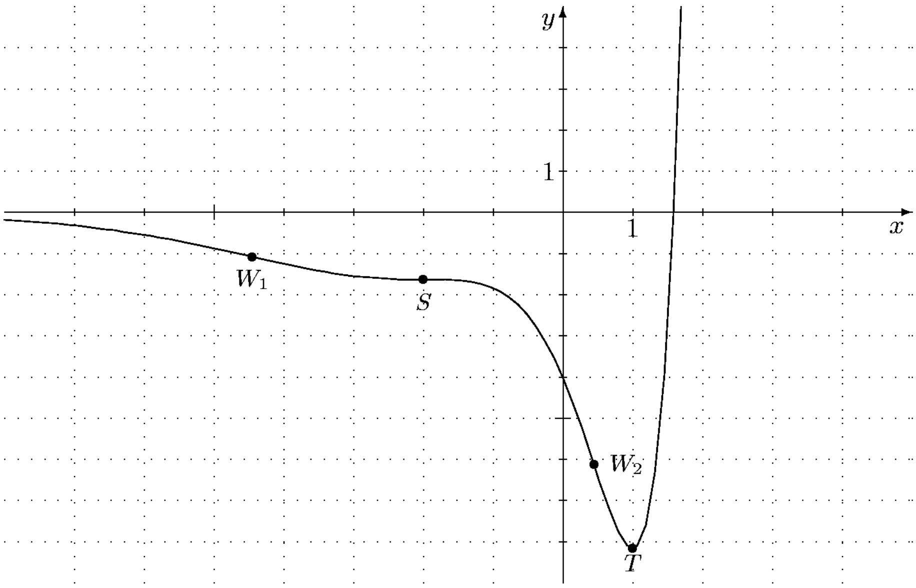
f) Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$.
Nullstellen: f hat nur eine Nullstelle: $\sqrt[3]{4}$, mit Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-4)e^x=\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3-4)e^x=0 \quad \text{(l'Hospital)}.$$

Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2e^x+(x^3-4)e^x=(x^3+3x^2-4)e^x\,,\\ f''(x) &= (3x^2+6x)e^x+(x^3+3x^2-4)e^x=(x^3+6x^2+6x-4)e^x\,. \end{aligned}$$

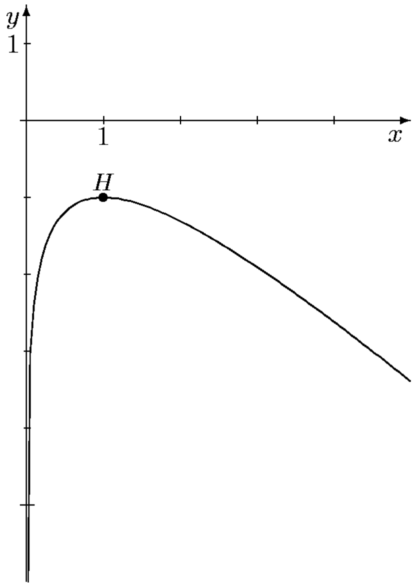
Zur Nullstellenberechnung von f' und f'' muss man kubische Gleichungen lösen.
Nullstellen von f': $+1$ ist Lösung von $x^3+3x^2-4=0$. Polynomdivision ergibt: $x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2$. Damit hat f' die Nullstellen $+1$ mit Vorzeichenwechsel, und -2 ohne Vorzeichenwechsel. Damit ist $+1$ eine Extrem- und -2 eine Sattelstelle von f.
Nullstellen von f'': Als Sattelstelle ist -2 auch Wendestelle, also Nullstelle von f'', d. h. von x^3+6x^2+6x-4. Polynomdivision durch $x+2$ ergibt: $x^3+6x^2+6x-4=(x+2)(x^2+4x-2)$. Nullstellen von x^2+4x-2 sind $x=-2\pm\sqrt{6}$. Damit hat f'' neben -2 noch zwei weitere Nullstellen $-2\pm\sqrt{6}$, beide mit Vorzeichenwechsel, also Wendestellen von f.
Wir erhalten den Tiefpunkt $T=(1,f(1))=(1,-3e)\approx(1;-8{,}15)$, den Sattelpunkt $S=(-2,f(-2))=(-2,-\frac{12}{e^2})\approx(-2;-1{,}62)$ und die beiden weiteren Wendepunkte $W_1=(-2-\sqrt{6},f(-2-\sqrt{6}))\approx(-4{,}45;\,-1{,}08)$, $W_2=(-2+\sqrt{6},f(-2+\sqrt{6}))\approx(0{,}45;\,-6{,}13)$.



2) a) Definitionsbereich ist der Bereich der positiven reellen Zahlen: $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$, da ln nur für positive Zahlen definiert ist.
Nullstellen sind algebraisch nicht bestimmbar, da die Unbekannte x sowohl unter dem Logarithmus wie außerhalb auftritt. Wir untersuchen zunächst den Verlauf des Graphen und kommen dann auf die Nullstellen zurück.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - 1) = -\infty \quad \text{(l'Hospital)},$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} (\underbrace{\ln x}_{\to -\infty} - x) = -\infty .$$



Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 , \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} .$$

Damit hat f'' nur negative Werte, f ist also stets rechtsgekrümmt.
Einzige Nullstelle von f' ist 1. Wegen der Rechtskrümmung von f ist 1 eine Maximalstelle von f: $H = (1, f(1)) = (1, -1)$. Da dies die einzige Extremstelle von f ist, ist -1 der absolut größte Wert, den f annimmt: f hat nur negative Werte, insbesondere keine Nullstellen!

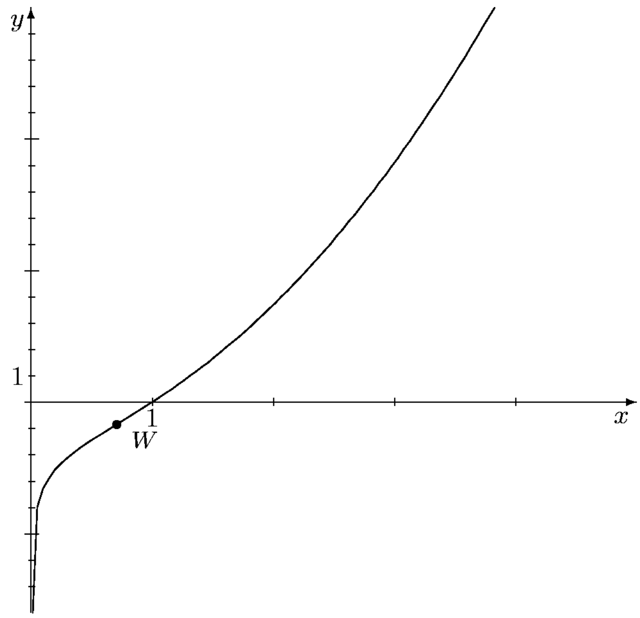
b) Definitionsbereich ist $]0, \infty[$.
Nullstellen sind wieder nicht algebraisch bestimmbar. Man kann aber $x = 1$ als Nullstelle erkennen. Ob es weitere Nullstellen gibt, untersuchen wir später.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}) = \infty , \qquad \lim_{x\to 0} (\ln x + x^2 - 1) = -\infty .$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\,.$$

$f'(x)$ ist über dem Definitionsbereich $]0,\infty[$ immer positiv, also ist f streng monoton wachsend, hat insbesondere keine Extremstellen.
Da f streng monoton wächst, kann f *höchstens* eine Nullstelle haben. Also ist die oben genannte Nullstelle $x = 1$ die *einzige,* wegen der Monotonie mit VZW von $-$ zu $+$.
$f''(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$ hat die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, beide mit Vorzeichenwechsel. Aber nur $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt im Definitionsbereich, ist also Wendestelle von f. Der Wendepunkt ist $W = (\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})) \approx (0{,}71;\ -0{,}85)$.



c) Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ definiert } &\iff \frac{x-1}{7-x} > 0 \\ &\iff (x-1>0 \ \wedge\ 7-x>0) \ \vee\ (x-1<0 \ \wedge\ 7-x<0) \\ &\iff (x>1 \ \wedge\ 7>x) \ \vee\ \underbrace{(x<1 \ \wedge\ 7<x)}_{\text{Widerspruch}} \iff 1<x<7\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Definitionsbereich des offene Intervall $]1,7[$.
Nullstellen:

$$f(x) = 0 \iff \frac{x-1}{7-x} = 1 \iff x-1 = 7-x \iff x = 4\,.$$

Grenzwerte: Wir bestimmen zunächst die Grenzwerte der inneren Funktion $\frac{x-1}{7-x}$ an den Rändern 1 und 7 des Definitionsbereiches:

$$\lim_{x\nearrow 7} \frac{x-1}{7-x} = \infty\,, \qquad \lim_{x\searrow 1} \frac{x-1}{7-x} = 0\,.$$

Daher folgt

$$\lim_{x\nearrow 7} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z\to\infty} \ln z = \infty\,, \qquad \lim_{x\searrow 1} \ln(\frac{x-1}{7-x}) = \lim_{z\searrow 0} \ln z = -\infty\,.$$

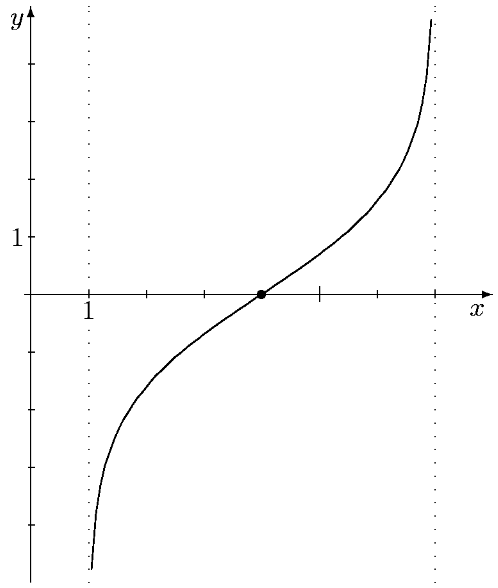
Ableitungen: Es ist $f(x) = \ln(x-1) - \ln(7-x)$, also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{7-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{7-x}\,,\\ f''(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(7-x)^2}\cdot(-1) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(7-x)^2}\,. \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich $]1,7[$ von f sind $x-1$ und $7-x$ positiv, also hat auch f' nur positive Werte: f ist monoton wachsend und hat keine Extremstellen.

$$f''(x) = 0 \iff 0 = \frac{(x-1)^2-(7-x)^2}{(x-1)^2(7-x)^2} = \frac{12x-48}{(x-1)^2(7-x)^2} \iff x = 4\,.$$

Damit hat f'' bei 4 eine Nullstelle. Wegen des linearen Zählers $12x-48$ liegt offenbar ein Vorzeichenwechsel vor: 4 ist Wendestelle von f.



d) Definitionsbereich ist $]0,\infty[$.
Nullstellen: Über dem angegebenen Definitionsbereich hat x^2 *keine* Nullstellen. Der Faktor $\ln x - 2$ hat nur eine Nullstelle:

$$\ln x - 2 = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2\,.$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst.
Grenzwerte: Ein Grenzwert ist klar:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot(\ln x - 2) = \infty\,.$$

Für den Grenzwert bei 0 wollen wir die Regel von de l'Hospital anwenden und formen zunächst folgendermaßen um:

$$\lim_{x\to 0} x^2(\ln x - 2) = \lim_{x\to 0}(x^2 \ln x - \underbrace{2x^2}_{\to 0}) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \,.$$

Bei dem letzten Limes ist die Voraussetzung der zweiten l'Hospitalschen Regel erfüllt: Der Nenner konvergiert gegen ∞. Also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(-\frac{x^2}{2}) = 0 \,.$$

Anmerkung: Auf diese Weise kann man generell zeigen:

$$\lim_{x\to 0}(x^k \ln x) = 0 \text{ für } k \geq 1 \,.$$

Auch an der Stelle 0 wird der Logarithmus von beliebigen Potenzen dominiert.
<u>Ableitungen:</u>

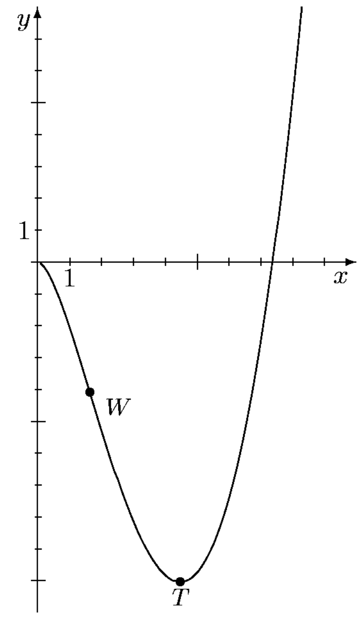
$$f'(x) = 2x(\ln x - 2) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2\ln x - 3) \,,$$
$$f''(x) = (2\ln x - 3) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x - 1 \,.$$

Einzige Nullstelle von f' (im Definitionsbereich von f) ist $x = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \approx 4{,}48$. Es liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ zu $+$ vor, da $\ln x$ monoton wächst: Also hat f hier ein Minimum. Der Tiefpunkt ist

$$T = (e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}})) = (e^{\frac{3}{2}}, e^3 \cdot (\frac{3}{2} - 2)) = (\sqrt{e^3}, -\frac{e^3}{2}) \approx (4{,}48;\ -10{,}04) \,.$$

Einzige Nullstelle von $f''(x) = 2\ln x - 1$ ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; es liegt ein Vorzeichenwechsel vor, da $2\ln x$ monoton ist, also hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt:

$$W = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e \cdot (\frac{1}{2} - 2)) = (\sqrt{e}, -\frac{3e}{2}) \approx (1{,}65;\ -4{,}08) \,.$$



e) <u>Definitionsbereich</u> ist wieder $\mathbb{D}(f) =]0, \infty[$.

<u>Nullstellen:</u> Über diesem Definitionsbereich gilt $x > 0$ und daher

$$f'(x) = 0 \iff x(3 - 2\ln x) = 0 \iff 3 = 2\ln x \iff x = e^{\frac{3}{2}}\,.$$

Da $3 - 2\ln x$ monoton fällt (und der Faktor x über $\mathbb{D}(f)$ immer positiv ist), liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ vor.

<u>Grenzwerte:</u>

$$\lim_{x\to\infty}(3x - 2x\ln x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot(3 - \underbrace{2\ln x}_{\to\infty}) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0}(3x - \underbrace{2x\ln x}_{\to 0}) = 0 \quad \text{(l'Hospital)}\,.$$

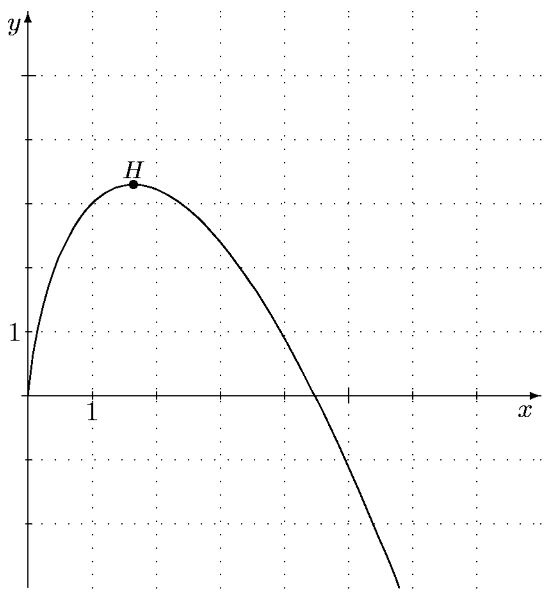
<u>Ableitungen:</u>

$$f'(x) = 3 - (2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x}) = 1 - 2\ln x\,, \quad f''(x) = -\frac{2}{x}\,.$$

Damit hat f'' nur negative Werte (im Definitionsbereich von f) und f ist rechtsgekrümmt; Wendestellen existieren nicht.

Einzige Nullstelle von f' ist $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Wegen der Rechtskrümmung hat f hier einen Hochpunkt:

$$H = (e^{\frac{1}{2}}, f(e^{\frac{1}{2}})) = (e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{2}}(3 - 2\ln e^{\frac{1}{2}})) = (\sqrt{e}, 2\sqrt{e}) \approx (1{,}65; 3{,}3)\,.$$



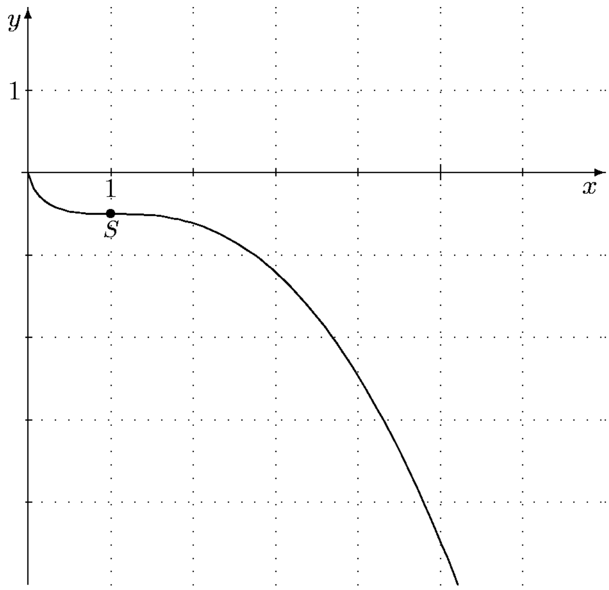
f) Definitionsbereich ist $I\!D(f) =]0, \infty[$.
Nullstellen: Man wird auf die algebraisch nicht angreifbare Gleichung $\ln x = \frac{x}{2}$ geführt. Wir kommen auf die Nullstellen später zurück.
Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} - \frac{1}{2}) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x \ln x}_{\to 0} - \frac{x^2}{2}) = 0\,.$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - x = \ln x - x + 1\,, \quad f''(x) = \frac{1}{x} - 1\,.$$

f'' hat nur eine einzige Nullstelle, und zwar bei 1; es liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ vor, da $\frac{1}{x}$ monoton fällt. Also hat f' (!) an dieser Stelle ein Maximum und f eine Wendestelle.
Da diese Maximalstelle die einzige Extremstelle von f' (!) ist, nimmt f' hier seinen größten Wert an; dieser ist $f'(1) = 0$. Daher kann f' keine weiteren Nullstellen und f keine Extremstellen besitzen. Die Wendestelle 1 ist wegen $f'(1) = 0$ eine Sattelstelle. Der Sattelpunkt ist $S = (1, f(1)) = (1, -\frac{1}{2})$.
Wir kommen zurück zu den Nullstellen von f. Da der Maximalwert von f' (!) gleich $f'(1) = 0$ ist, gilt für alle $x \neq 1$ $f'(x) < f'(1) = 0$, so dass f streng monoton fällt. Wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ sind also alle Werte von f negativ, f hat keine Nullstelle.

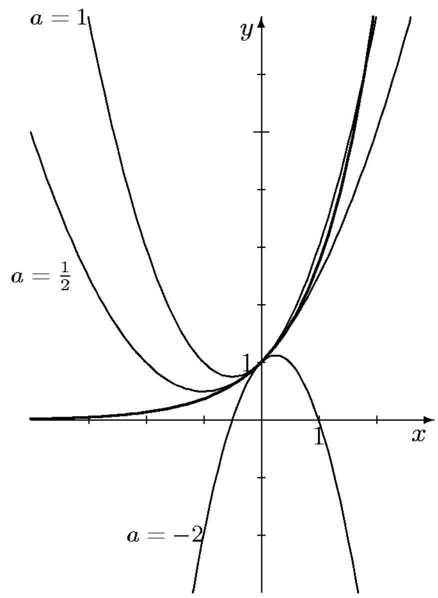


3) a) Da g ganzrational vom Grade 2 sein soll, hat der Funktionsterm von g die Form $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Zwei Graphen berühren sich an einer Stelle, wenn sie dort im Funktions- und Ableitungswert übereinstimmen. Gesucht ist also g mit den Eigenschaften $g(0) = f(0)$ und $g'(0) = f'(0)$. Wegen $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$ gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$.

Die gesuchten Funktionen g müssen also die Bedingungen $g(0) = 1$ und $g'(0) = 1$ erfüllen. Wegen $g(x) = ax^2 + bx + c$ ist $g(0) = c$ und $g'(x) = 2ax + b$, $g'(0) = b$. Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch

$$g(x) = ax^2 + x + 1 \ (a \neq 0)\,.$$

b) Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f'(x) = -e^{-x}$ und daher $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$. Die gleiche Rechnung ergibt nun als Lösungen $g(x) = ax^2 - x + 1$ $(a \neq 0)$.

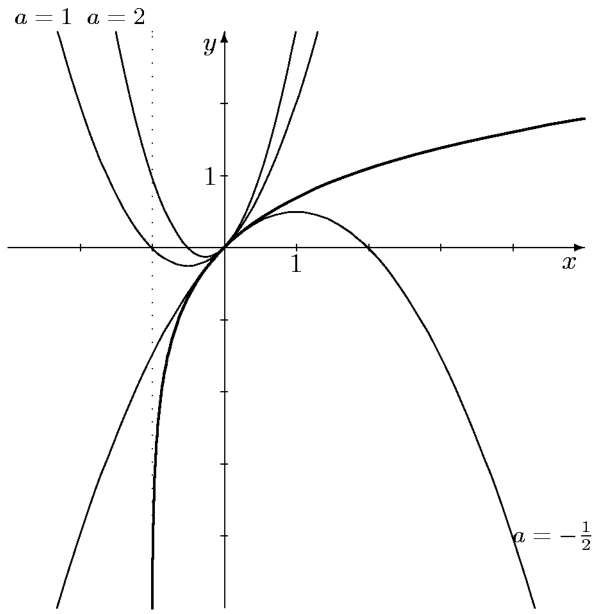


4) a) Wie in der vorangehenden Aufgabe setzen wir an: $g(x) = ax^2 + bx + c$. Es ist $f(x) = \ln(x+1)$ und $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Die Bedingungen an g lauten daher $g(0) = f(0) = \ln 1 = 0$ und $g'(0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1$. Dies führt zu folgenden Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten a, b, c:

$$0 = g(0) = c\,, \qquad 1 = g'(0) = b\,.$$

Also sind die gesuchten Funktionen gegeben durch $g(x) = ax^2 + x$,

b) Für $f(x) = \ln(\frac{1}{x+1}) = -\ln(x+1)$ erhält man $g(x) = ax^2 - x$.

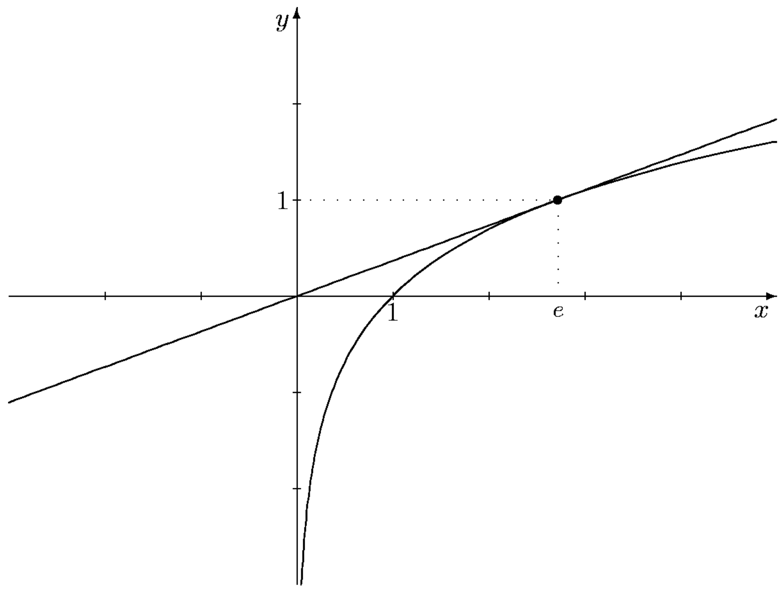


5) a) Die allgemeine Tangentengleichung (für eine Funktion f und die Berührstelle a) lautet $y = f(a) + f'(a)(x - a) = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$. Dies verläuft durch den Ursprung, wenn der y-Achsenabschnitt $f(a) - f'(a) \cdot a = 0$ ist. Gesucht sind also die Berührstellen a mit

$$f(a) = f'(a) \cdot a \iff \ln a = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \iff a = e\,.$$

Damit verläuft nur die Tangente mit Berührpunkt $a = e$ durch den Ursprung; sie hat die Gleichung

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a) \iff y = 1 + \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e}\,.$$

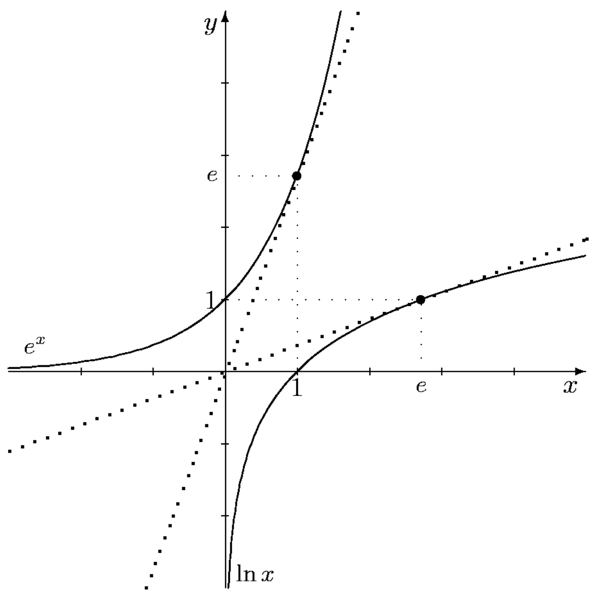


b) Hier ist $f(a) = \ln(a+1)$ und $f'(a) = \frac{1}{a+1}$. Also suchen wir solche a mit

$$\ln(a+1) = \frac{1}{a+1} \cdot a = \frac{a}{a+1} \iff (a+1)\ln(a+1) - a = 0\,.$$

Diese Gleichung enthält die Unbekannte a im Logarithmus und außerhalb, ist daher nicht einfach rein algebraisch auflösbar. Aber $a = 0$ ist als Lösung erkennbar (dies ergibt sich auch daraus, dass $f(0) = 0$ ist und der Graph von f selbst durch den Ursprung verläuft). Ob es aber weitere Lösungen dieser Gleichung gibt, erkennen wir erst nach einer geeigneten Monotonieüberlegung: An der Stelle $a = 0$ hat die Funktion $(a+1)\ln(a+1) - a$ eine Nullstelle, die zugleich einziges Extremum dieser Funktion ist. Es gibt also keine weiteren Nullstellen und damit keine weiteren Lösungen des gestellten Problems: Die einzige Tangente an den Graphen von f, die durch den Ursprung verläuft ist, die Tangente im Ursprung: $y = f(0) + f'(0)(x-0) = x$.

6) a) Diese Aufgabe lässt sich auf Aufgabe 5 a) zurückführen, da $f(x) = e^x$ die Umkehrfunktion zu der in Aufgabe 5 a) behandelten Funktion ln ist. Die Graphen sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Spiegelt man die in 5 a) gefundene Tangente $y = \frac{x}{e}$ an der Winkelhalbierenden, so erhält man $x = \frac{y}{e} \iff y = ex$ und der in 5 a) gefundene Berührpunkt $(e, 1)$ liefert durch Spiegelung den Berührpunkt $(1, e)$ in dieser Aufgabe.



Rechnerische Lösung: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Gesucht ist also die Berührstelle a mit (siehe 5) a))

$$f(a) = f'(a)a \iff e^a = e^a a \iff a = 1\,.$$

Die gesuchte Tangentengleichung ist $y = e^a + e^a(x-a) = e + e(x-1) = ex$.
b) $f(x) = e^{x-k}$, $f'(x) = e^{x-k}$. Also

$$f(a) = f'(a)a \iff e^{a-k} = e^{a-k}a \iff a = 1\,.$$

Die Berührstelle ist ebenfalls immer $a = 1$, der Berührpunkt $(1, e^{1-k})$ und die Tangentegleichung $y = e^{1-k} \cdot x$.

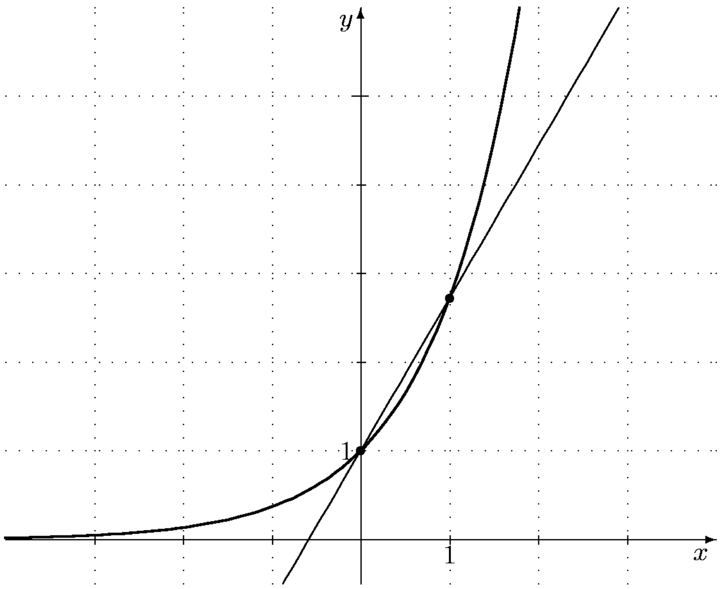
Für $f(x) = e^{kx}$, $f'(x) = ke^{kx}$ ergibt sich:

$$e^{ka} = ke^{ka} \cdot a \iff a = \frac{1}{k}\,.$$

Die Berührstelle ist $\frac{1}{k}$, der Berührpunkt $(\frac{1}{k}, e)$ und die Tangentengleichung $y = ke \cdot x$.

7) a) Gesucht ist die lineare Funktion $g(x) = mx + n$, auf deren Graph die beiden Punkte liegen. $P_1 = (0, 1)$ gibt den y-Achsenabschnitt $n = 1$. Der Anstieg ist $m = \frac{e-1}{1-0} = e - 1$ und die Funktionsgleichung also $g(x) = (e-1)x + 1$.

Skizze:



b) Wir untersuchen die Differenzfunktion $d(x) = g(x) - f(x) = (e-1)x + 1 - e^x$ auf Extremwerte im Intervall $[0, 1]$. Da 0 und 1 die Schnittstellen beider Graphen sind, hat d dort den Wert 0: $d(0) = d(1) = 0$.

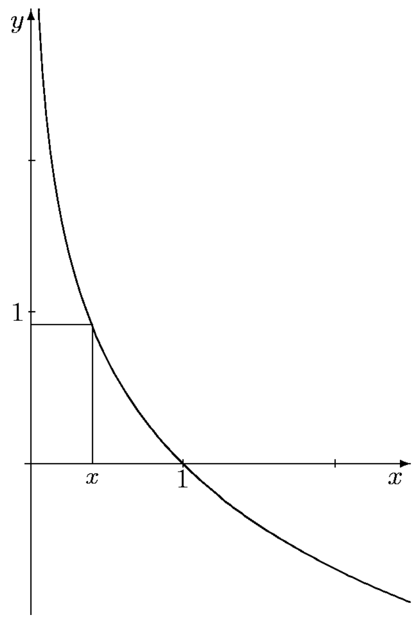
$$d'(x) = e - 1 - e^x = 0 \iff e^x = e - 1 \iff x = \ln(e-1)\,.$$

$d'(x)$ ändert an dieser Nullstelle das Vorzeichen von + zu −, da $-e^x$ monoton fällt. Also hat d hier ein Maximum; der Maximalwert ist

$$d(\ln(e-1)) = (e-1)\ln(e-1) + 1 - e^{\ln(e-1)} = (e-1)\ln(e-1) - e + 2 \approx 0{,}21\,.$$

8) a) $f(x) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$. Der Graph von f ensteht also aus dem bekannten Graphen

von ln durch Spiegelung an der x-Achse:



In die Skizze ist bereits ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = -x \cdot \ln x \text{ für } 0 < x \leq 1\,.$$

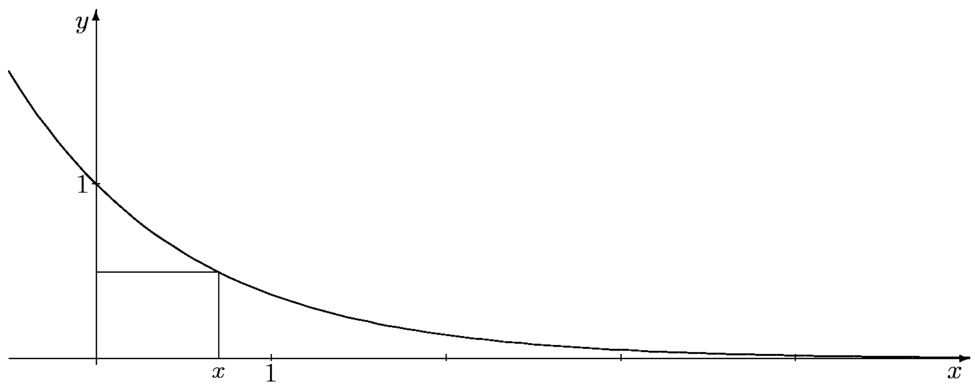
Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to 0} A(x) = -\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ und $A(1) = 0$.

$$A'(x) = -\ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -(\ln x + 1)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Hier hat A' einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$, da $-\ln x$ monoton fällt; A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(e^{-1}) = -e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1}\,.$$

b) $f(x) = e^{-x}$. Diese Funktion ist die Umkehrfunktion der in a) gegebenen Funktion, denn $y = e^{-x} \iff \ln y = -x \iff -\ln y = x$. Die beiden Graphen von a) und b) sind also spiegelbildlich zueinander bzgl. der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Aufgrund der Symmetrie erhält man hier denselben maximalen Flächeninhalt.
Zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = e^{-x}$.



Wieder ist in die Skizze ein solches achsenparalleles Rechteck eingezeichnet. Sein Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von der eingezeichneten Größe x):

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x} \text{ für } 0 \leq x\,.$$

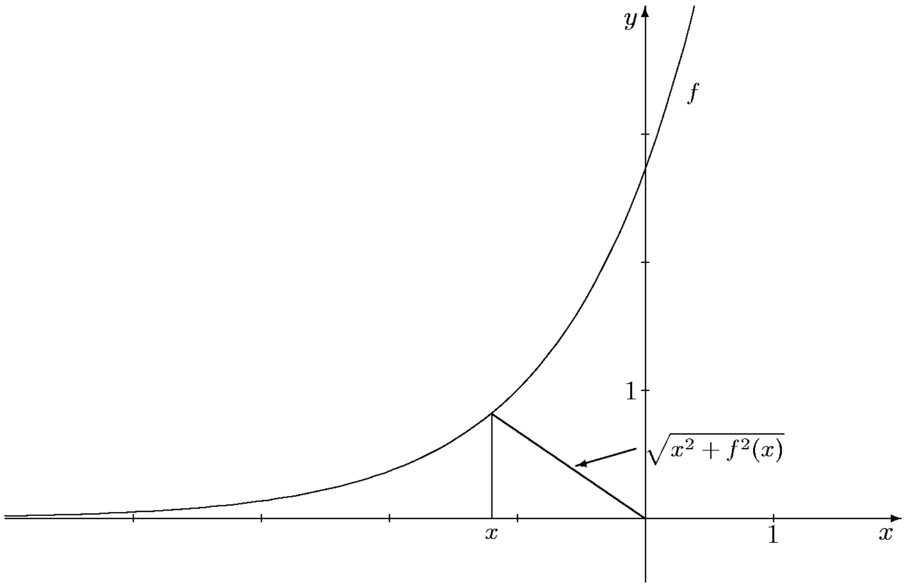
Die Randwerte von A sind $\lim_{x\to\infty} A(x) = 0$ (l'Hospital) und $A(0) = 0$.

$$A'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)\,.$$

Einzige Nullstelle von A' ist also 1, und zwar mit Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ ($1-x$ fällt monoton). A hat hier also ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt beträgt

$$A(1) = e^{-1}\,.$$

9) Ein beliebiger Punkt des Graphen von f ist von der Form $(x, f(x))$. Sein Abstand vom Koordinatenursprung $(0,0)$ ist nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{x^2 + f^2(x)}$.



Wir untersuchen das Abstandsquadrat

$$h(x) = x^2 + f^2(x)\,,$$

denn da die Wurzelfunktion monoton wächst, ist der Abstand genau dort maximal, wo auch das Abstandsquadrat maximal ist.

a) In diesem Falle ist $f(x) = e^{x+1}$ und damit $h(x) = x^2 + e^{2x+2}$. Die Randgrenzwerte von h sind $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$. Es muss also ein Minimum existieren (was auch anschaulich klar ist). Nullstellen von $h'(x) = 2x + 2e^{2x+2}$ sind nicht einfach rein algebraisch bestimmbar. Man findet jedoch durch Einsetzen $x = -1$ als eine Nullstelle von h'. Dass dies die einzige ist, erkennt man an der zweiten Ableitung, $h''(x) = 2 + 4e^{2x+2}$, die nur positive Werte annimmt. Also ist h' monoton wachsend und kann daher nur die eine Nullstelle -1 haben. An dieser hat h ein Minimum, da wegen $h''(x) > 0$ die Funktion h linksgekrümmt ist. Der Punkt des Graphen von f mit dem geringsten Abstand vom Koordinatenursprung ist $P = (-1, f(-1)) = (-1, 1)$. Der minimale Abstand ist daher

$$\sqrt{h(-1)} = \sqrt{1 + f^2(-1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,.$$

b) Hier ist $f(x) = \ln \frac{x}{e} = \ln x - 1$. Dies ist wieder die Umkehrfunktion von a), denn $y = \ln x - 1 \iff y+1 = \ln x \iff e^{y+1} = x$. Damit ist der Graph von f spiegelbildich zum Graphen aus a) bezüglich der Winkelhalbierenden im I./III. Quadranten. Dadurch ändert sich das geometrische Problem nicht: Der geringste Abstand zu $(0,0)$ ist $\sqrt{2}$, er wird im gespiegelten Punkt $(1,-1) = (1, f(1))$ des Graphen von f angenommen.
Wieder zur Übung hier die entsprechenden Überlegungen und Rechnungen für $f(x) = \ln \frac{x}{e}$. Die zu untersuchende Funktion ist hier

$$h(x) = x^2 + f^2(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2 \text{ für } x > 0\,.$$

Die Randwerte sind wieder $\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = \infty$.

$$h'(x) = 2x + 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = 2x + \frac{2}{x}(\ln x - 1)$$

Wieder kann man die Gleichung $h'(x)$ nicht einfach algebraisch lösen. Bei der Erstellung einer Wertetabelle kann man zwar auf die Nullstelle $x = 1$ stoßen: $h'(1) = 0$, aber der Nachweis, dass dies die einzige ist, bleibt schwierig. Der Weg über h'' führt auch nicht unmittelbar zum Ziel. Wieder ist eine geeignete Faktorisierung der Terms hilfreich:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \cdot (x^2 + \ln x - 1)\,.$$

Wir untersuchen nun nur noch $x^2 - 1 + \ln x$. Diese Funktion hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Sie ist für $x > 0$ monoton wachsend (Ableitung $2x + \frac{1}{x}$), kann also keine weiteren Nullstellen besitzen. [Beachten Sie: Durch das Abspalten des nullstellenfreien (sogar positiven) Faktors $\frac{2}{x}$ wird die Ableitung des verbleibenden Faktors viel einfacher; seine Monotonie reicht aber für die hier anstehende Frage aus!]