Übungen (12)

1) Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen: S. 45, Aufgaben 3–4

3.
Gegeben ist die Funktion f. Gib drei Stammfunktionen F_1, F_2 und F_3 von f an.

a) $f(x)=x^4$ **d)** $f(x)=x^{10}$ **g)** $f(x)=a\cdot x^n$ **j)** $f(x)=5$
b) $f(x)=x^5$ **e)** $f(x)=4x^7$ **h)** $f(x)=x^4+x^6$ **k)** $f(x)=0$
c) $f(x)=x^6$ **f)** $f(x)=-9x^8$ **i)** $f(x)=x^2+6$ **l)** $f(x)=-1$

4.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$
b) $f(x)=4x^5-3x^4+4x^3-\frac{1}{2}x^2+5x-3$
c) $f(x)=-\frac{2}{3}x^5+\frac{x^3}{2}-\frac{5x}{2}+\sqrt{3}$
d) $f(x)=3\cdot\left(2-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^5\right)$
e) $f(x)=\frac{-0{,}5x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{4}{5}}{5}$
f) $f(x)=kx^4-\frac{k}{3}x^2+2kx+k^2$
g) $f(x)=\frac{5-6x^4+3x^5}{3}$
h) $f(x)=2x^k-\frac{1}{2}x^{k-1}+3$

2) Notwendige Umformungen von $f(x)$: S. 45, Aufgabe 5–6

5.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1+x^2$ **b)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-4$ **c)** $f(x)=\frac{x^7+1}{x^2}$ **d)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

6.
Gib zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=(x+1)^2$ **d)** $f(x)=x^3(x-1)^2$ **g)** $f(x)=\frac{1}{k}x(x-k)^2$
b) $f(x)=(2x-3)^2$ **e)** $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x+2)^2$ **h)** $f(x)=\frac{2-x^3-3x^4+x^5}{x^2}$
c) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)^4$ **f)** $f(x)=8(x+2)\cdot(x-9)$ **i)** $f(x)=\frac{2\sqrt{x^5}-3}{\sqrt{x}}$

3) Vermischte Stammfunktionen: S. 45, Aufgabe 7

7.
Gib jeweils zwei Stammfunktionen von f an.

a) $f(x)=-3x^4+\frac{1}{x}\cdot x^3-1$ **d)** $f(x)=\frac{-2x^3+4x^5}{x^2}$ **g)** $f(x)=\frac{2x-x^5}{x^3}$
b) $f(x)=\frac{1}{2}x^7+4x^2$ **e)** $f(x)=(x^4-1)^2$ **h)** $f(x)=4-\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$
c) $f(x)=5-6x^9$ **f)** $f(x)=\frac{4x^2-5}{x^2}$ **i)** $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{7}{x^2}$

4) Stammfunktionen mit vorgeschriebenen Werten: S. 49, Aufgabe 13–14

13.

Gesucht ist diejenige Stammfunktion von f, die an der Stelle a den Funktionswert 0 hat.

a) $f(x) = 3x + 4;\quad a = -3$

b) $f(x) = 7x^2 + 2x + 3;\quad a = -1$

c) $f(x) = (x+1)^2;\quad a = 0$

d) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 7x + 2;\quad a = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}\ (x > 0);\quad a = 1$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}};\quad a = 1$

14.

Gesucht ist diejenige Stammfunktion von f, die an der Stelle a den Funktionswert c hat.

a) $f(x) = 7x + 5;\quad a = -4;\ c = 3$

b) $f(x) = x^2 - x + 5;\quad a = -2;\ c = 5$

c) $f(x) = 3x^3 + 5x;\quad a = 1;\ c = 4$

d) $f(x) = 3 \cdot (x-4)^2;\quad a = 4;\ c = -3$

Übungen (12) — Lösungen

1) **S. 45, Aufgabe 3:** Angegeben ist jeweils ein Stammfunktionsterm $F(x)$. Weitere sind gegeben durch $F(x) + c$ mit beliebiger Konstante $c \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{1}{5}x^5$ b) $\frac{1}{6}x^6$ c) $\frac{1}{7}x^7$

d) $\frac{1}{11}x^{11}$ e) $\frac{1}{2}x^8$ f) $-x^9$

g) $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ h) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7$ i) $\frac{1}{3}x^3 + 6x$

j) $5x$ k) 0 l) $-x$

S. 45, Aufgabe 4:

a) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ b) $\frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x$

c) $-\frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \sqrt{3} \cdot x$ d) $3 \cdot (2x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{9}x^6)$

e) $\frac{1}{5} \cdot (-0{,}1x^5 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{4}{5}x)$ f) $\frac{k}{5}x^5 - \frac{k}{9}x^3 + kx^2 + k^2x$

g) $\frac{1}{3} \cdot (5x - \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6)$ h) $\frac{2}{k+1}x^{k+1} - \frac{1}{2k}x^k + 3x$

2) **S. 45, Aufgabe 5:** Man muss zunächst den gegebenen Funktionsterm so umformen, dass man eine Summe von Vielfachen von Potenzfunktionen (mit möglicher weise negativen oder gebrochenen Exponenten) erhält. Erst dann kann man aufgrund der Potenzregel Stammfunktionen finden. Angegeben ist jeweils ein möglicher Stammfunktionsterm $F(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 + x^2 = x^{-2} + 1 + x^2$,

$F(x) = \frac{1}{-1}x^{-1} + x + \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{x} + x + \frac{1}{3}x^3$,

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4 = x^{-\frac{1}{2}} - 4$,

$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 4x = 2\sqrt{x} - 4x$,

c) $f(x) = \frac{x^7+1}{x^2} = x^5 + x^{-2}$,

$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{-1}x^{-1} = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{x} = \frac{x^7-6}{6x}$,

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - x^{-\frac{1}{2}}$,

$F(x) = x - \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = x - 2\sqrt{x}$.

S. 45, Aufgabe 6: Hier sind (bis auf h),i)) nur ganzrationale Funktionen gegeben, aber sie sind nicht in der Polynomdarstellung (Summen von Vielfachen von Potenzfunktionen); man muss sie durch Ausmultiplizieren erst in diese Standardform bringen. (In Sonderfällen sind andere Wege möglich, siehe später.) Wieder gibt $F(x)$ jeweils einen möglichen Stammfunktionsterm an.

a) $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x,$

b) $f(x) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9, \quad F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x,$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4 = \frac{1}{16}x^8, \quad F(x) = \frac{1}{144}x^9,$

d) $f(x) = x^3(x-1)^2 = x^3(x^2-2x+1) = x^5 - 2x^4 + x^3, \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4,$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x+2)^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2+4x+4) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2,$

$F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3,$

f) $f(x) = 8(x+2)(x-9) = 8(x^2 - 7x - 18), \quad F(x) = 8(\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 18x),$

g) $f(x) = \frac{1}{k}x(x^2 - 2kx + k^2) = \frac{1}{k}x^3 - 2x^2 + kx, \quad F(x) = \frac{1}{4k}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2,$

h) $f(x) = \dfrac{2 - x^3 - 3x^4 + x^5}{x^2} = 2x^{-2} - x - 3x^2 + x^3,$

$F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4,$

i) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^5} - 3}{\sqrt{x}} = (2x^{\frac{5}{2}} - 3) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}},$

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x}.$

3) **S. 45, Aufgabe 7:** Angegeben ist jeweils ein möglicher (wenn auch nicht der naheliegendste) Stammfunktionsterm $F(x)$. Ein zweiter ist etwa gegeben durch $F(x) + 1$.

a) $f(x) = -3x^4 + \frac{1}{x} \cdot x^3 - 1 = -3x^4 + x^2 - 1, \quad F(x) = -\frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x + 133,$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 4x^2, \quad F(x) = \frac{1}{16}x^8 + \frac{4}{3}x^3 - 17,$

c) $f(x) = 5 - 6x^9, \quad F(x) = 5x - \frac{3}{5}x^{10} + 200,$

d) $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 4x^5}{x^2} = -2x + 4x^3, \quad F(x) = -x^2 + x^4 - 7,$

e) $f(x) = (x^4 - 1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1, \quad F(x) = \frac{1}{9}x^9 - \frac{2}{5}x^5 + x + 1,$

f) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{x^2} = 4 - 5x^{-2}, \quad F(x) = 4x - \frac{5}{-1}x^{-1} + 1024 = 4x + \frac{5}{x} + 1024,$

g) $f(x) = \dfrac{2x - x^5}{x^3} = 2x^{-2} - x^2, \quad F(x) = \frac{2}{-1}x^{-1} - \frac{1}{3}x^3 + 13 = -\frac{2}{x} - \frac{1}{3}x^3 + 13,$

h) $f(x) = 4 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 5x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$,

$F(x) = 4x - \dfrac{5}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{-1}x^{-1} - 266 = 4x - 10\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - 266$,

i) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{x^2} = 4x^{-\frac{1}{2}} + 7x^{-2}$, $F(x) = 8x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-1} + \dfrac{49}{17} = 8\sqrt{x} - \dfrac{7}{x} + \dfrac{49}{17}$.

4) **S. 49, Aufgabe 13:** Man bestimmt zunächst *irgendeine* Stammfunktion $F(x)$. Dann ist (über einem Intervall) *jede* Stammfunktion von der Form $F(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Man muss nun das c so bestimmen, dass $F_2(x) = F(x) + c$ bei a eine Nullstelle hat: $F_2(a) = F(a) + c = 0$. Man erkennt: $c = -F(a)$, $F_2(x) = F(x) - F(a)$. Dies bedeutet:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a)$ die Stammfunktion von f mit einer Nullstelle bei a.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Nullstelle bei a:

	$f(x)$	a	$F(x)$	$F(a)$	Ergebnis
a)	$3x + 4$	-3	$\frac{3}{2}x^2 + 4x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{3}{2}$
b)	$7x^2 + 2x + 3$	-1	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{7}{3}x^3 + x^2 + 3x + \frac{13}{3}$
c)	$x^2 + 2x + 1$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$	0	$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$
d)	$5x^3 + 2x^2 + 7x + 2$	1	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x$	$\frac{89}{12}$	$\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x - \frac{89}{12}$
e)	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	1	$-x^{-1} = -\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{x} + 1$
f)	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	1	$2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$	2	$2\sqrt{x} - 2$

S. 49, Aufgabe 14: Hier ist nun nicht eine Nullstelle, sondern eine c-Stelle (das ist eine Stelle mit Funktionswert c) vorgeschrieben. Man geht jedoch genauso wie in der vorangehenden Aufgabe vor: Ist F *irgendeine* Stammfunktion von f, so ist zunächst $F(x) - F(a)$ eine Stammfunktion, die bei a den Wert 0 hat; addiert man nun c, so erhält man das Gewünschte:

> Ist F irgendeine Stammfunktion von f, so ist $F(x) - F(a) + c$ die Stammfunktion von f, die bei a den Wert c hat.

Die nachfolgende Tabelle enthält in der letzten Spalte die gesuchten Stammfunktionen mit Funktionswert c an der Stelle a:

	$f(x)$	a	c	$F(x)$	$F(a)$	$F(x) - F(a) + c$
a)	$7x + 5$	-4	3	$\frac{7}{2}x^2 + 5x$	36	$\frac{7}{2}x^2 + 5x - 33$
b)	$x^2 - x + 5$	-2	5	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x$	$-\frac{44}{3}$	$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{59}{3}$
c)	$3x^3 + 5x$	1	4	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2$	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{4}$
d)	$3(x-4)^2$	4	-3	$(x-4)^3$	0	$(x-4)^3 - 3$