

Übungen (14)

Exponentialfunktionen

1) Stammfunktionen: S. 86, Aufgabe 10; S. 94, Aufgabe 4

10.

Gib eine Stammfunktion F von f an.

$$\text{a) } f(x) = e^x \quad \text{b) } f(x) = e^{x+1} \quad \text{c) } f(x) = e^{2x} \quad \text{d) } f(x) = e^{2x-3} \quad \text{e) } f(x) = e^{-x} \quad \text{f) } f(x) = e^{-3x+2}$$

4.

Ermittle zu folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion F.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 3e^{2x+1} & \text{c) } f(x) = -0,5e^{2-\frac{1}{2}x} & \text{e) } f(x) = (e^x - e^{-x})^2 \\ \text{b) } f(x) = 2e^{-x+1} & \text{d) } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{f) } f(x) = (e^x + e^{-x})^2 \end{array}$$

2) Integrale: S. 94, Aufgabe 5; S. 86, Aufgabe 12

5.

Berechne die folgenden bestimmten Integrale.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_1^3 2e^{3x} dx & \text{c) } \int_{-2}^{+3} (e^x - e^{-x}) dx & \text{e) } \int_{-1}^0 (e^x - x - 1) dx \\ \text{b) } \int_{-1}^{+1} 3e^{-x} dx & \text{d) } \int_0^1 (e^{-x} + x) dx & \text{f) } \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx \end{array}$$

12.

Bestimme k so, daß das Integral den angegebenen Wert hat.

$$\text{a) } \int_0^1 ke^x dx = e \quad \text{b) } \int_0^1 (e^x + kx) dx = 2 \quad \text{c) } \int_0^k e^x dx = e \quad \text{d) } \int_0^2 ke^{kx} dx = e - 1$$

Der Logarithmus in der Integralrechnung

3) Stammfunktionen: S. 95, Aufgabe 8

8.

Bestimme zur Funktion f jeweils eine Stammfunktion F.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} & \text{d) } f(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x-1} + \frac{1}{\frac{1}{2}x+1} & \text{g) } f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} \\ \text{b) } f(x) = \frac{1-x-x^2-x^4}{2x^2} & \text{e) } f(x) = \frac{-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 3}{x^2} & \Delta \text{ h) } f(x) = \frac{x-4}{x-5} \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{3(x-4)} + \frac{1}{2(x+3)} & \text{f) } f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} & \Delta \text{ i) } f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \end{array}$$

4) Integrale: S. 93, Aufgaben 10–11

10.

Berechne das folgende Integral.

$$\text{a) } \int_{-2}^{-6} \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_1^e \frac{1}{x} dx \quad \text{c) } \int_{0,5}^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{d) } \int_{-5}^{-1} \frac{1}{x} dx \quad \text{e) } \int_a^b \frac{1}{x} dx \quad (a, b > 0) \quad \text{f) } \int_a^b \frac{1}{x} dx \quad (a, b < 0)$$

11.

Berechne mit Hilfe linearer Substitution (siehe Seite 50).

$$\text{a) } \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^{+1} \frac{3}{x+5} dx \quad \text{c) } \int_{-1}^0 \frac{1}{3x-6} dx \quad \text{d) } \int_2^3 \frac{4}{5x+10} dx \quad \text{e) } \int_{-1}^3 \frac{-7}{-2y+8} dy$$

Übungen (14) — Lösungen

1) S. 86, Aufgabe 10:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= e^x, & \text{b) } F(x) &= e^{x+1}, & \text{c) } F(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x}, \\ \text{d) } F(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x-3}, & \text{e) } F(x) &= -e^{-x}, & \text{f) } F(x) &= -\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+2}. \end{aligned}$$

S. 94, Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= 3e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot e^{2x+1}, & \text{b) } F(x) &= 2e^{-x+1} \cdot \frac{1}{-1} = -2e^{-x+1}, \\ \text{c) } F(x) &= -0,5e^{2-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} = e^{2-\frac{1}{2}x}, & \text{d) } F(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \\ \text{e) } f(x) &= (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}, & F(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}, \\ \text{f) } f(x) &= (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}, & F(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}. \end{aligned}$$

2) S. 94, Aufgabe 5:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^3 2e^{3x} dx &= \left[\frac{2}{3}e^{3x} \right]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot (e^9 - e^3) = \frac{2}{3}e^3 \cdot (e^6 - 1) \approx 5388,67, \\ \text{b) } \int_{-1}^1 3e^{-x} dx &= \left[-3e^{-x} \right]_{-1}^1 = -3e^{-1} + 3e = 3e - \frac{3}{e} \approx 7,05, \\ \text{c) } \int_{-2}^3 (e^x - e^{-x}) dx &= \left[e^x + e^{-x} \right]_{-2}^3 = (e^3 + e^{-3}) - (e^{-2} + e^2) \\ &= e^3 - e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \approx 12,61, \\ \text{d) } \int_0^1 (e^{-x} + x) dx &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1,13, \\ \text{e) } \int_{-1}^0 (e^x - x - 1) dx &= \left[e^x - \frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-1}^0 = 1 - (e^{-1} - \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \approx 0,13, \\ \text{f) } \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx &= \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \approx 0,76, \end{aligned}$$

S. 86, Aufgabe 12:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 ke^x dx = e &\iff \left[ke^x \right]_0^1 = e \iff ke - k = e \iff k = \frac{e}{e-1} \approx 1,58 \\ \text{b) } \int_0^1 (e^x + kx) dx = 2 &\iff \left[e^x + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

$$\iff e + \frac{k}{2} - 1 = 2 \iff k = 2(3 - e) \approx 0,56$$

$$c) \int_0^k e^x dx = e \iff e^k - 1 = e \iff k = \ln(e + 1) \approx 1,31$$

$$d) \int_0^2 k e^{kx} dx = e - 1 \iff [e^{kx}]_0^2 = e - 1 \iff e^{2k} - 1 = e - 1$$

$$\iff e^{2k} = e \iff 2k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$$

3) **S. 95, Aufgabe 8:**

$$a) f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} = 3x^{-1} - 2x^{-2} + (x-1)^{-1},$$

$$F(x) = 3 \ln|x| + 2x^{-1} + \ln|x-1| = 3 \ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-1|,$$

$$b) f(x) = \frac{1-x-x^2-x^4}{2x^2} = \frac{1}{2}(x^{-2} - x^{-1} - 1 - x^2),$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (-x^{-1} - \ln|x| - x - \frac{1}{3}x^3) = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3(x-4)} + \frac{1}{2(x+3)}, \quad F(x) = \frac{1}{3} \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln|x+3|,$$

$$d) f(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x-1} + \frac{1}{\frac{1}{2}x+1}, \quad F(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2 \ln|\frac{1}{2}x+1|,$$

Anmerkung: Auch $F_2(x) = \ln|2x+1| - \ln|3x-1| + 2 \ln|x+2|$ ist eine Stammfunktion von f . Wie erklären Sie den scheinbaren Widerspruch?

$$e) f(x) = \frac{-3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - 3}{x^2} = -3x + \frac{1}{2} - 5x^{-1} - 3x^{-2},$$

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 5 \ln|x| + \frac{3}{x},$$

$$f) f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1}, \quad F(x) = 2 \ln|x| - 3 \ln|x+1|,$$

$$g) f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}, \quad F(x) = 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x+2|,$$

$$h) f(x) = \frac{x-4}{x-5} = 1 + \frac{1}{x-5} \text{ (notfalls Polynomdivision!),}$$

$$F(x) = x + \ln|x-5|,$$

$$i) f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} = 1 + \frac{2}{2x-1}, \quad F(x) = x + \ln|2x-1|.$$

Das in den Beispielen h), i) angewendete Verfahren lässt sich auf alle rationalen Funktionen anwenden, bei denen der Nenner linear ist: Man führt zunächst Polynomdivision durch; als Ergebnis erhält man eine ganzrationale Funktion $g(x) +$ eine rationale Funktion der Form $\frac{c}{ax+b}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion der letzteren ist $F(x) = \frac{c}{a} \cdot \ln|ax+b|$.

4) **S. 93, Aufgabe 10:**

$$\text{a) } \int_{-2}^{-6} \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_{-2}^{-6} = \ln 6 - \ln 2 = \ln \frac{6}{2} = \ln 3,$$

$$\text{b) } \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1,$$

$$\text{c) } \int_{0,5}^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_{0,5}^2 = \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2 - (\ln 1 - \ln 2) = 2 \ln 2,$$

$$\text{d) } \int_{-5}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5,$$

e/f) Das zu berechnende Integral $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ ist wegen des Pols von $\frac{1}{x}$ nur definiert, wenn $a, b > 0$ oder $a, b < 0$, also a, b gleiches Vorzeichen haben. Dann ist $\frac{b}{a}$ positiv und es gilt:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |b| - \ln |a| = \ln \frac{|b|}{|a|} = \ln \left| \frac{b}{a} \right| = \ln \frac{b}{a}.$$

Man erhält also in e) und f) dasselbe Ergebnis:

Haben a, b gleiches Vorzeichen, so gilt: $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$

Man kann diese allgemeine Formel natürlich auch zur Berechnung der vorangehenden Aufgaben a)–d) benutzen.

S. 93, Aufgabe 11: Alle Integrale sind definiert, da die Definitionslücken der (rationalen, also stetigen) Integranden nicht im Integrationsintervall liegen.

$$\text{a) } \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = \left[\ln |x-1| \right]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,69,$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{3}{x+5} dx = 3 \cdot \left[\ln |x+5| \right]_{-1}^1 = 3(\ln 6 - \ln 4) = 3 \ln \frac{3}{2} \approx 1,22,$$

$$\text{c) } \int_{-1}^0 \frac{1}{3x-6} dx = \left[\frac{1}{3} \ln |3x-6| \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3}(\ln 6 - \ln 9) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{3} \approx -0,14,$$

$$\text{d) } \int_2^5 \frac{4}{5x+10} dx = \frac{4}{5} \int_2^5 \frac{1}{x+2} dx = \frac{4}{5} \left[\ln |x+2| \right]_2^5 = \frac{4}{5}(\ln 7 - \ln 4) \approx 0,45,$$

$$\text{e) } \int_{-1}^3 \frac{-7}{-2y+8} dy = \int_{-1}^3 \frac{-7}{-2x+8} dx = \frac{7}{2} \int_{-1}^3 \frac{1}{2x-4} dx = \frac{7}{2} \left[\ln |2x-4| \right]_{-1}^3 = \frac{7}{2}(\ln 1 - \ln 5) = -\frac{7}{2} \ln 5 \approx -5,63.$$