Übungen (16)

1) a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von $a = -2$ bis $b = 3$.
b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^5 - 3x^4$ und der x-Achse in den Grenzen von -3 bis $+3$.
2) Bestimmen Sie die Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse *eingeschlossen* wird:
a) $f(x) = x^3 - x^5$,
b) $f(x) = x^4 - 4x^2$,
c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$.
3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischem dem Graphen von f und der x-Achse:
a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^3$
4) Bestimmen Sie den Inhalt der von den Graphen von f und g *eingeschlossenen* Fläche:
a) $f(x) = x^4 - x^2, \quad g(x) = 4(x-1)(x+1)$
b) $f(x) = x^5 - 4x^3, \quad g(x) = x^4 - 4x^2$ Korr!
c) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x + 2, \quad g(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
d) $f(x) = x^3(x-1), \quad g(x) = -x + 1$
e) $f(x) = \frac{4}{x^2}, \quad g(x) = -x^2 + 5$
f) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$,
5) Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g mit $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ und $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ zwei Flächenstücke von gleichem Inhalt einschließen.
6) In die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ ist eine Sehne (=Verbindungstrecke zweier Parabelpunkte) mit den Endpunkten $P_1 = (-1,y_1)$ und $P_2 = (2,y_2)$ gezeichnet. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Parabel und die Sehne einschließen.
7) Es sei $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.
a) Der Graph von f schließt mit der Geraden durch die beiden Tiefpunkte ein Flächenstück ein. Wie groß ist der Flächeninhalt?
b) Wie groß ist die Fläche, die der Graph von f mit der Tangente durch den Hochpunkt einschließt?

Übungen (16) — Lösungen

1) a) Wir bestimmen zunächst die Bereiche zwischen a und b, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Dazu berechnen wir die Nullstellen mit VZW in diesem Bereich.

$$x^3 - x^4 = 0 \iff x^3(1-x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 1\,.$$

Beides sind Nullstellen mit Vorzeichenwechsel, da von ungerader Ordnung.
Das Intervall $[a{,}b] = [-2, +3]$ wird durch die beiden Nullstellen 0 und 1 in drei Teilintervalle $[-2{,}0]$, $[0{,}1]$, $[1{,}3]$ zerlegt, in denen f sein Vorzeichen nicht ändert. Wir berechnen für alle drei Intervalle die Integrale:

$$\int_{-2}^{0}(x^3-x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{-2}^{0} = 0 - \big(\frac{16}{4} - \frac{-32}{5}\big) = -\frac{52}{5} = -10{,}4\,,$$
$$\int_{0}^{1}(x^3-x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,,$$
$$\int_{1}^{3}(x^3-x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{1}^{3} = \big(\frac{81}{4} - \frac{243}{5}\big) - \frac{1}{20} = -\frac{568}{20} = -\frac{142}{5} = -28{,}4\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist die Summe der Beträge der Integrale, also

$$A = \frac{52}{5} + \frac{1}{20} + \frac{142}{5} = 10{,}4 + 0{,}05 + 28{,}4 = 38{,}85$$

b) Wieder berechnen wir die Nullstellen mit VZW:

$$x^5 - 3x^4 = 0 \iff x^4(x-3) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 3\,.$$

Die Nullstellen sind 0 (ohne VZW) und +3 (mit VZW). Beide Nullstellen liegen im Intervall $[a{,}b] = [-3, +3]$, aber da 3 am Rand des betrachteten Intervalls liegt, findet im Intervall kein VZW statt. Es genügt also in diesem Fall, das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{-3}^{3}(x^5-3x^4)\,dx = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5\Big]_{-3}^{3} = \big(\frac{3^6}{6} - \frac{3^6}{5}\big) - \big(\frac{3^6}{6} - \frac{-3^6}{5}\big) = -2\cdot\frac{3^6}{5} = -291{,}6\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = 291{,}6$.

2) a) Wir bestimmen die Nullstellen von

$$f(x) = x^3 - x^5 = x^3(1-x^2) = x^3(1+x)(1-x)\,.$$

Die beiden 'äußersten' Nullstellen sind $a = -1$ und $b = +1$, die einzige weitere Nullstelle *mit* VZW ist 0. Wir berechnen also

$$\int_{0}^{1}(x^3-x^5)\,dx = \Big[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

Wegen der Punktsymmetrie des Integranden ergibt das Integral $\int_{-1}^{0} f$ den negativen Wert $-1/12$. Der gesuchte Flächeninhalt ist

$$A = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\,.$$

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$ hat die Nullstellen -2, 0 und $+2$. Die beiden äußersten sind -2 und $+2$, bei der dritten liegt kein VZW vor, daher berechnen wir $\int_{-2}^{2} f$. Wegen der Achsensymmetrie von f gilt

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx = 2 \cdot \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2 \cdot (\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher $A = \dfrac{128}{15}$.

c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x-2)(x-3)$ hat die Nullstellen 0, 2 und 3. Die äußersten sind 0 und 3, bei der dritten dazwischen findet ein VZW statt. Daher berechnen wir

$$\int_0^2 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_0^2 = \frac{32}{5} - 20 + 16 = \frac{12}{5}\,,$$

$$\int_2^3 f = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^3\Big]_2^3 = \Big(\frac{3^5}{5} - \frac{5 \cdot 3^4}{4} + 2 \cdot 3^3\Big) - \frac{12}{5} = \frac{27}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{21}{20}\,.$$

Die gesuchte Fläche ist daher

$$A = \frac{12}{5} + \frac{21}{20} = \frac{69}{20} = 3{,}45\,.$$

3) a) Die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ bestimmt man durch Substitution $z = x^2$:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \iff (z-4)(z-1) = 0 \iff z = 4 \;\vee\; z = 1\,.$$

Die Lösung der Gleichung $x^2 = z$ ergibt für f die vier Nullstellen ± 1, ± 2. An allen Stellen findet ein VZW statt. Wir integrieren von Nullstelle zu Nullstelle. Da f achsensymmetrisch ist, genügt es, die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = \frac{38}{15}\,,$$

$$\int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big]_1^2 = \Big(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8\Big) - \frac{38}{15} = -\frac{22}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist dann das Doppelte (wegen der Symmetrie) der *Beträge* dieser Integralwerte, also

$$A = 2 \cdot (\frac{38}{15} + \frac{22}{15}) = 8\,.$$

Ergebnisse zu b) und c):
b) Nullstellen: 0 doppelt und 1 sowie 2 einfach. Fläche $A = \frac{7}{60} + \frac{23}{60} = \frac{1}{2}$.

c) Graph ist punktsymmetrisch, Nullstellen sind 0 und ± 2. Die Fläche beträgt $A = 2 \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$.

4) a) Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - x^2 - (4x^2 - 4) = x^4 - 5x^2 + 4$. Dies ist genau die Funktion f aus der vorangehenden Aufgabe a). Nun sind die Schnittstellen von f und g gerade die Nullstellen von h und die Flächenstücke zwischen den Graphen von f und g sind genauso groß wie die Flächenstücke zwischen dem Graphen von h und der x-Achse. Deren Gesamtflächeninhalt wurde bereits in der vorangehenden Aufgabe zu $A = 8$ bestimmt.

c) Hier ergibt sich ebenfalls $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 + x^3 - 3x + 2 - (x^3 + 5x^2 - 3x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$ und damit dasselbe Ergebnis wie unter a).

b) Als erstes bestimmen wir die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^3 - x^2 - 4x + 4)$. Diese hat bei 0 eine doppelte Nullstelle. Eine weitere Nullstelle von h ist $x = 1$ und Polynomdivison ergibt $h(x) = x^2(x-1)(x^2-4) = x^2(x-1)(x+2)(x-2)$. Die äußersten Nullstellen von h sind -2 und $+2$; dazwischen liegt nur ein VZW vor, und zwar bei $+1$. (0 ist doppelte Nullstelle, dort also kein VZW.)

Zur Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse müssen wir also zwei Integrale bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{-2}^{1} \\
&= (\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}) - (\frac{32}{3} + \frac{32}{5} - 16 - \frac{32}{3}) \\
&= \frac{3}{10} - (-\frac{48}{5}) = \frac{99}{10} \\
\int_{1}^{2} h(x)\,dx &= \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3\Big]_{1}^{2} \\
&= (\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}) - (\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3}) \\
&= -\frac{16}{15} - \frac{3}{10} = -\frac{41}{30}\,.
\end{aligned}$$

Da die Funktion h in den beiden Integrationsbereichen ihr Vorzeichen nicht ändert, sind die Beträge der Integrale gleich den Flächeninhalten der entsprechenden Flächenstücke und die gesuchte Gesamtfläche ist

$$A = \frac{99}{10} + \frac{41}{30} = \frac{169}{15}\,.$$

Diese zwischen dem Graphen von h und der x-Achse eingeschlossene Fläche ist genauso groß wie die gesuchte Fläche, die zwischen den beiden Graphen von f und g eingeschlossen ist.

d) Wieder berechnen wir als erstes die Differenzfunktion $h(x) = x^4 - x^3 + x - 1$ und deren Linearfaktorzerlegung. Erste Nullstellen liegen bei $x = \pm 1$ und Polynomdivision ergibt $h(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$. Da der Faktor $x^2 - x + 1$ keine Nullstellen besitzt, hat h nur die beiden Nullstellen ± 1.

Wir berechnen also das Integral $\int_{-1}^{1} h$ und beachten die symmetrischen Grenzen. Dies ergibt

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - x^3 + x - 1)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^4 - 1)\,dx = 2 \cdot (\frac{1}{5} - 1) = -\frac{8}{5}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $A = \frac{8}{5}$.

e) Hier ist wegen des Pols von f bei 0 Vorsicht angebracht. Der Pol darf in keinem der nachfolgenden Integrationsintervalle liegen!

Wir beginnen wie üblich. Die Differenzfunktion ist

$$h(x) = \frac{4}{x^2} - (-x^2 + 5) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2}.$$

Deren Nullstellen bestimmen wir mittels Substitution:

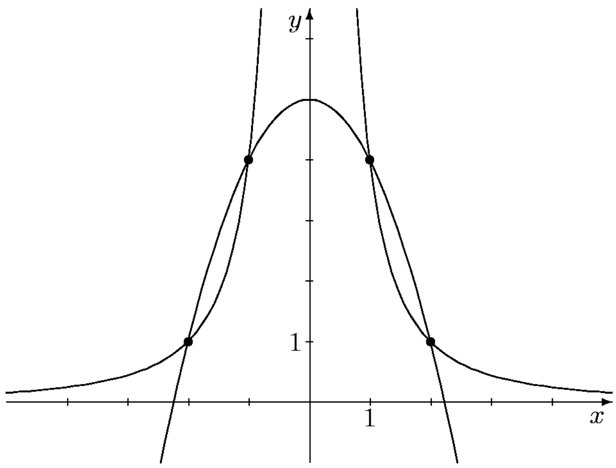
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff z^2 - 5z + 4 = 0 \ \wedge \ z = x^2 \\ &\iff (z-4)(z-1) = 0 \ \wedge \ z = x^2 \\ &\iff x^2 = 4 \ \vee \ x^2 = 1 \iff x = \pm 2 \ \vee \ x = \pm 1 \end{aligned}$$

Dies sind 4 verschiedene Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, also alle mit Vorzeichenwechsel. Die Integrationsintervalle sind daher $[-2,-1]$ und $[1{,}2]$. Das Integrationsintervall $[-1{,}1]$ entfällt, da darin der Pol 0 von f und h liegt! Wegen der Achsensymmetrie von h braucht nur ein Integral berechnet zu werden:

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \int_1^2 (4x^{-2} + x^2 - 5)\,dx = \Big[-4x^{-1} + \frac{1}{3}x^3 - 5x\Big]_1^2 = -\frac{2}{3}.$$

Die beiden Graphen schließen zwei kongruente Flächenstücke vom Inhalt $\frac{2}{3}$ miteinander ein. Der Gesamtflächeninhalt ist $A = \frac{4}{3}$.

Die nachstehende Skizze beider Graphen (begründen Sie kurz den Verlauf) zeigt die Problematik des Pols von f: Im Bereich zwischen den Schnittstellen ± 1 umschließen die Graphen von f und g kein Flächenstück.



f) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$, während g nur für positive x definiert ist. Der gemeinsame Definitionsbereich beider Funktionen ist also das Intervall $]0,\infty[$. Über diesem Definitionsbereich gelten dann die folgenden Äquivalenzen:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \iff -x\sqrt{x} + 7\sqrt{x} - 6 = 0 \iff z = \sqrt{x} \wedge -z^3 + 7z - 6 = 0 \ \ (*)$$

Die kubische Gleichung $z^3-7z+6=0$ hat eine Nullstelle bei $z=1$. Polynomdivision ergibt $z^3-7z+6=(z-1)(z^2+z-6)$. Den quadratischen Faktor zerlegt man nach Vieta in $z^2+z-6=(z-2)(z+3)$ und erhält somit die folgende Faktorisierung $z^3-7z+6=(z-1)(z-2)(z+3)$. Also

$$\begin{aligned}
(*) \iff\ & z=\sqrt{x} \ \wedge\ (z-1)(z-2)(z+3)=0 \\
\iff\ & z=\sqrt{x} \ \wedge\ \big(z=1 \ \vee\ z=2 \ \vee\ z=-3\big) \\
\iff\ & \sqrt{x}=1 \ \vee\ \sqrt{x}=2 \\
\iff\ & x=1 \ \vee\ x=4\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen also folgendes Integral, das hier positiv ausfällt und daher zugleich den gesuchten Flächeninhalt angibt:

$$\int_1^4 (-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}-2x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \Big[-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x-4x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$
$$=\big(-\frac{8}{3}+\frac{28}{3}-8\big)-\big(-\frac{1}{6}+\frac{7}{3}-4\big)=\frac{1}{2}$$

5) Da die Flächen zwischen zwei Graphen genauso groß sind, wie die Flächenstücke zwischen der Differenzfunktion und der x-Achse, untersuchen wir nur letztere. Wir faktorisieren die Differenzfunktion durch Ausklammern und mit dem Satz des Vieta:

$$f(x)-g(x)=3x^3-18x^2+24x=3x(x^2-6x+8)=3x(x-2)(x-4)\,.$$

Damit liegen 3 Nullstellen 0, 2, 4 vor, jeweils mit Vorzeichenwechsel. Also schließt der Graph der Differenzfunktion zwei Flächenstücke mit der x-Achse ein; eines liegt ober-, eines unterhalb der x-Achse. Um nun zu zeigen, dass beide gleich groß sind, berechnen wir das Gesamtintegral von 0 bis 4 und zeigen, dass dieses den Wert 0 hat:

$$\int_0^4 (3x^3-18x^2+24x)\,dx = \Big[\frac{3}{4}x^4-6x^3+12x^2\Big]_0^4 = 3\cdot 4^3-6\cdot 4^3+12\cdot 4^2=0$$

6) Da die Punkte auf der Parabel liegen sollen, gilt $y_1=(-1)^2=1$ und $y_2=4$. Der Sekantenanstieg ist damit $m=\frac{4-1}{2-(-1)}=1$. Die Sekantengleichung daher $y=x+b$, wobei wir das b bestimmen, indem wir einen der Punkte in die Sekantengleichung einsetzen: $4=2+b \iff b=2$. Damit ist die Sekante Graph der Funktion $g(x)=x+2$.
Gesucht ist nun der Inhalt des von den Graphen von $f(x)=x^2$ und $g(x)=x+2$ eingeschlossenen Flächenstücks. Die Schnittstellen beider Graphen (aus Gradgründen höchstens zwei) sind bereits durch die beiden Punkte bekannt: -1 und 2. Wir berechnen also das Integral der Differenzfunktion in diesen Grenzen:

$$\int_{-1}^2 (x^2-x-2)\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_{-1}^2 = -\frac{9}{2}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also 4,5. (Das negative Vorzeichen des Integrals zeigt, dass zwischen den beiden Schnittpunkten die Parabel *unter* der Sekante verläuft.)

7) Der Graph von f ist achsensymmetrisch. Wir bestimmen zunächst die Extrempunkte. $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$ hat die Nullstellen 0 sowie $\pm\sqrt{2}$, alle einfach, alle mit VZW, also alle Extremstellen von f. Da der führende Koeffizient von f positiv ist, sind $\pm\sqrt{2}$ Minimalstellen und 0 eine Maximalstelle. Die Extrempunkte sind also

$$T_1 = (-\sqrt{2}\,, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}\,, -1)\,, \quad T_2 = (\sqrt{2}\,, -1) \quad \text{und} \quad H = (0\,, 3)\,.$$

a) Die Gerade durch die Tiefpunkte ist eine Parallele zur x-Achse. Sie ist Graph der Funktion $g(x) = -1$. $\pm\sqrt{2}$ sind die einzigen Schnittstellen dieser beiden Graphen ($f(x) = g(x) \iff x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \iff (x^2-2)^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$). Da der Graph achsensymmetrisch ist, berechnen wir nur

$$\int_0^{\sqrt{2}} (f-g) = \int_0^{\sqrt{2}} (x^4 - 4x^2 + 4)\,dx = \Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot(\frac{4}{5} - \frac{8}{3} + 4) = \frac{32}{15}\cdot\sqrt{2}$$

und verdoppeln diesen Wert. Der gesuchte Flächeninhalt ist $A = \dfrac{64\sqrt{2}}{15}$.

b) Der einzige Hochpunkt ist $H = (0, 3)$; die Tangente hat den Anstieg 0, so dass sie Funktionsgraph von $g(x) = 3$ ist. Die Schnittstellen von f und g sind

$$f(x) = g(x) \iff 0 = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) \iff x = 0 \ \vee \ x = \pm 2\,.$$

Da $f - g$ bei 0 eine doppelte Nullstelle hat, also kein VZW vorliegt, berechnen wir nur

$$\int_{-2}^{2} (f-g) = 2\cdot\int_0^2 (x^4 - 4x^2)\,dx = 2\cdot\Big[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\Big]_0^2 = 2\cdot(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) = -\frac{128}{15}\,.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist nun $A = \dfrac{128}{15}$.

Nachfolgend eine Skizze des Graphen und der Flächenstücke. Beachten Sie, dass zur Berechnung der Flächeninhalte keine detaillierte Untersuchung des Funktionsgraphen notwendig war, aber zur Veranschaulichung ist eine grobe Skizze immer nützlich.