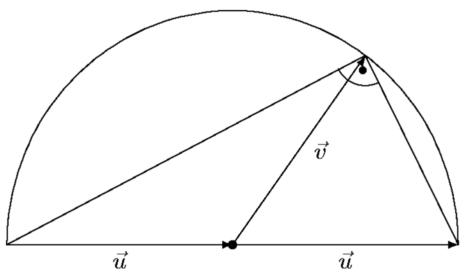
Übungen (V9)

1) a) Begründen Sie für zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ durch geeignete Rechnung mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} \iff |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \ .$$

Erläutern Sie den Zusammenhang mit binomischen Formeln.
Formulieren Sie den geometrischen Inhalt dieser Äquivalenz in Worten.
Folgern Sie aus dieser Beziehung die nachfolgenden geometrischen Sachverhalte:
b) Ein Parallelogramm ist genau dann eine *Raute* (d. h. hat 4 gleichlange Seiten), wenn die Diagonalen orthogonal zueinander sind.
c) Ein Dreieck ist genau dann *gleichschenklig,* wenn eine Seitenhalbierende die Gegenseite senkrecht schneidet bzw. wenn eine Mittelsenkrechte durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft.
d) Ein Punkt P hat genau dann von zwei verschiedenen Punkten A, B denselben Abstand, wenn er auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt.
e) Der Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des *Umkreises.*
f) Folgern Sie aus a) (mit Hilfe nebenstehender Skizze) den Satz des *Thales:*
Verbindet man die beiden Endpunkte eines Kreisdurchmessers mit irgendeinem anderen Punkt des Kreises, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Durchmesser als Hypotenuse.
g) Formulieren und begründen Sie die *Umkehrung* des Satzes des Thales.



2) Berechnen Sie für das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3, -1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (0, 4)$
a) den Schwerpunkt S,
b) den Höhenschnittpunkt H, sowie
c) den Umkreismittelpunkt M.
Fertigen Sie parallel zu Ihrer Rechnung eine saubere Skizze an.

3) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3, 2)$, $B = (8, 2)$ und $C = (6, 6)$.
   a) Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
   b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass zwei Innenwinkel übereinstimmen.
   c) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Sachverhalt aus b) allgemein für beliebige gleichschenklige Dreiecke.

4) a) Zeigen Sie durch konkrete Rechnung mit dem Skalarprodukt, dass für zwei gleichlange Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \neq o$ der Vektor $\vec{u} + \vec{v}$ die Richtung der Winkelhalbierenden angibt.
b) Gegeben sei das Dreieck $A = (-5, -1)$, $B = (7, -10)$, $C = (7, 15)$. Zeigen Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.
c) Es sei M dieser gemeinsame Schnittpunkt. [Zur Kontrolle: $M = (2, 0)$.] Berechnen Sie die Lote von M auf die drei Dreiecksseiten sowie die Abstände von M zu den Dreiecksseiten. Was fällt Ihnen auf?

Übungen (V9) — Lösungen

1) a) Es gilt

$$\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{u}-\vec{v} \iff 0 = (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u}-\vec{u} \bullet \vec{v}+\vec{v} \bullet \vec{u}-\vec{v} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2 \iff |\vec{u}| = |\vec{v}| \,.$$

In Worten bedeutet dies: Zwei Vektoren sind genau dann gleich lang, wenn ihr Summenvektor senkrecht zum Differenzvektor ist.
b) Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die linear unabhängigen Kantenvektoren eines Parallelogramms. Dann sind $\vec{u}-\vec{v}$ und $\vec{u}+\vec{v}$ die Diagonalenvektoren und diese sind genau dann orthogonal, wenn die Kantenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang sind, also eine Raute vorliegt.
c) Sind $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ zwei Seitenvektoren eines Dreiecks, so ist $\vec{v}-\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ Richtungsvektor der dritten Seite und $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) = \overrightarrow{AM_{BC}}$ Richtungsvektor der Seitenhalbierenden. Dann gilt gemäß a)

$$\begin{aligned} \vec{u}, \vec{v} \text{ gleich lang } &\iff \vec{v}-\vec{u} \perp \vec{u}+\vec{v} \iff \vec{v}-\vec{u} \perp \frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v}) \\ &\iff \text{Dreiecksseite} \perp \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte} = \text{Seitenhalbierende} \\ &\iff \text{Mittelsenkrechte trifft gegenüberliegende Ecke.} \end{aligned}$$

d) Dies ist eine Umformulierung von c), denn ein Punkt C hat von 2 Punkten A, B genau dann den gleichen Abstand, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Nach c) ist dies genau dann der Fall, wenn C auf der Mittelsenkrechten von A, B liegt.
e) Ist M der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten, so hat M von A, B und von B, C, also von allen drei Punkten denselben Abstand. Damit ist M Mittelpunkt des Umkreises und die dritte Mittelsenkrechte verläuft auch durch M.
f) Da der Punkt P auf dem Kreis liegt, sind die eingezeichneten Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, also sind die Vektoren $\vec{v}+\vec{u}$ und $\vec{v}-\vec{u}$, dies sind gerade die Kantenvektoren des Dreiecks, orthogonal zueinander.
g) Es gilt umgekehrt:

Die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke mit fester Hypotenuse liegen auf einem Kreis.

Begründung: Wenn die Kantenvektoren $\vec{u}+\vec{v}$ und $\vec{u}-\vec{v}$ des Dreiecks orthogonal sind, dann sind nach a) die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich lang, d. h. der Eckpunkt hat vom Mittelpunkt der Hypotenuse denselben Abstand wie die Endpunkte der Hypotenuse. Also liegt der Punkt auf dem Kreis mit der Hypotenuse als Durchmesser.

2) a) Es ist

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff S = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \,.$$

b) Wir wissen aus Übung (8), Aufg. 4, dass sich alle drei Höhen in einem Punkt schneiden, es genügt also, den Schnittpunkt von zwei Höhen zu berechnen.
Höhe h_a durch A:
Die Höhe h_a ist die Gerade durch A mit einem Richtungsvektor $\vec{n}_a \perp \overrightarrow{BC}$. Im 2-dimensionalen Raum ist die Bestimmung eines Normalenvektors sehr einfach, denn es gilt stets $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$; man vertauscht die Koordinaten und ändert ein Vorzeichen.

In diesem Fall ist $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, wir wählen daher $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten als Parameterdarstellung für h_a:

$$X \in h_a \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + r\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (r \in \mathbb{R})\,.$$

Höhe h_b durch B:
Wir wählen als Richtungsvektor $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und erhalten die Parameterdarstellung

$$X \in h_b \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + s\vec{n}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \ (s \in \mathbb{R})\,.$$

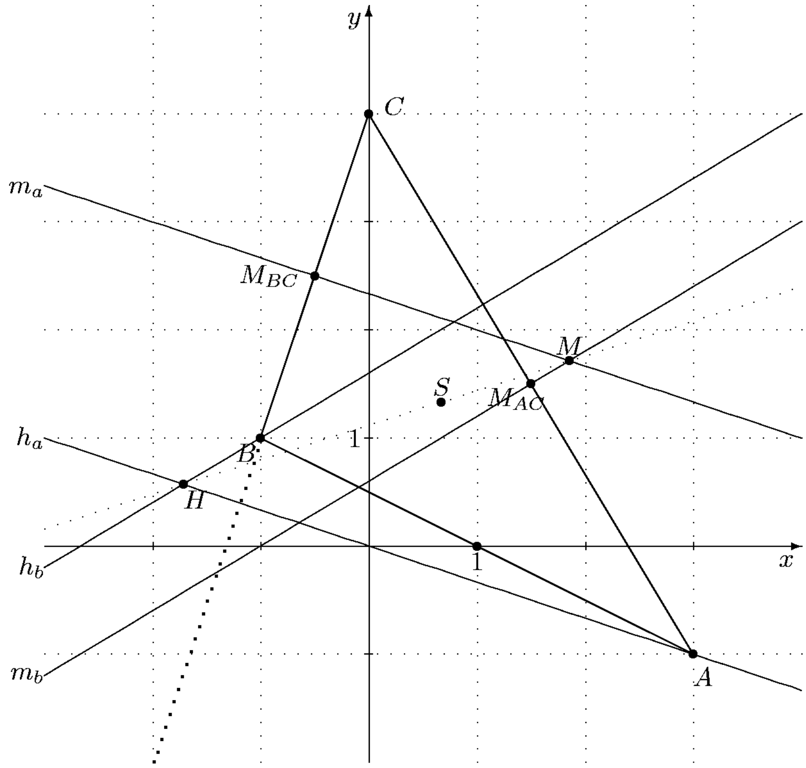
Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \iff 3r + 5s = 4 \ \wedge\ -r + 3s = -2$$

$$\iff r = 3s + 2 \ \wedge\ 14s + 6 = 4 \iff s = -\frac{1}{7} \ \wedge\ r = \frac{11}{7}\,.$$

Der Höhenschnittpunkt H ist gegeben durch

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} \iff H = (-\frac{12}{7}, \frac{4}{7})\,.$$



c) Nach der vorangehenden Aufgabe müssen wir den Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten bestimmen. Diese haben dieselben Richtungsvektoren wie die Höhen, verlaufen aber durch die Mittelpunkte der Seiten:

$$X \in m_a \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{BC}} + r\vec{n}_a = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + r\vec{n}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X \in m_b \iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_{AC}} + r\vec{n}_b = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + r\vec{n}_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \iff 3r + 5s = -2 \ \wedge\ -r + 3s = 1$$

$$\iff r = 3s - 1 \ \wedge\ 14s - 3 = -2 \iff s = \frac{1}{14} \ \wedge\ r = -\frac{11}{14}\,,$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix},\ M = (\frac{13}{7}, \frac{12}{7})\,.$$

3) a) Wir berechnen die Längen der drei Dreiecksseiten:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 5\,,\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = 5\,,\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

Damit sind die Dreiecksseiten durch A gleich lang.
b) Wir berechnen die (Cosinuswerte der) Winkel β bei B und γ bei C:

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}\,,$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}\,.$$

Damit stimmen die Cosinuswerte, also auch die Winkel überein.
c) Gegeben ein gleichschenkliges Dreieck ABC. Seien $u = \overrightarrow{AB}$ und $v = \overrightarrow{AC}$ die gleich langen Seitenvektoren; dann ist $\overrightarrow{BC} = v - u$ der dritte Seitenvektor des Dreiecks. Wir zeigen nun, dass der Winkel β bei B, der gebildet wird von den Vektoren $-u$ und $v - u$ (Skizze!), übereinstimmt mit dem Winkel γ bei C, der gebildet wird von $-v$ und $u - v$:

$$\cos(\beta) = \frac{(-u) \bullet (v-u)}{|-u| \cdot |v-u|} = \frac{-u \bullet v + |u|^2}{|u| \cdot |v-u|}\,,$$

$$\cos(\gamma) = \frac{(-v) \bullet (u-v)}{|-v| \cdot |u-v|} = \frac{-u \bullet v + |v|^2}{|v| \cdot |v-u|}\,.$$

Wegen $|u| = |v|$ stimmen beide Brüche in Zähler und Nenner überein. Bei gleichen Cosinuswerten sind folglich auch die Winkel identisch: $\beta = \gamma$.

4) a) Wir zeigen, dass der Winkel α zwischen $\vec{u}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ mit dem Winkel β zwischen $\vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$ übereinstimmt. Da $\vec{u}, \vec{v}$ linear unabhängig sind, kann keiner der Vektoren der Nullvektor sein, so dass definitionsgemäß gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u} + \vec{v}|}\,, \quad \cos(\beta) = \frac{\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u} + \vec{v}|}\,.$$

Wegen $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ stimmen die Nenner beider Brüche überein. Die Zähler $\vec{u} \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \bullet \vec{v}$ und $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + |\vec{v}|^2$ sind aus demselben Grunde (und wegen der Kommutativität des Skalarproduktes) identisch.
b) Winkelhalbierende durch A:
Wir berechnen zunächst die von A ausgehenden Seitenvektoren und bestimmen positive Vielfache gleicher Länge 1:

$$u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad |u| = \sqrt{144 + 81} = 15\,, \quad u' = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$v = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad |v| = \sqrt{144 + 256} = 20\,, \quad v' = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Als Richtungsvektor der Winkelhalbierenden durch A können wir also gemäß a) wählen:

$$\vec{u}' + \vec{v}' = \frac{1}{5} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. einfacher} \quad w_A = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als eine mögliche Parameterdarstellung für die Winkelhalbierende durch A:

$$\text{Winkelhalbierende durch } A\text{:} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + rw_A = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Genauso verfahren wir mit den anderen Eckpunkten.
Eckpunkt B:

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix}, \ |\vec{w}| = 25\,, \ \vec{w}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\vec{x} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}, \ |\vec{x}| = 15\,, \ \vec{x}' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\vec{w}' + \vec{x}' = \frac{1}{5} (\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}) = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \text{bzw. } \vec{w}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
&\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{w}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eckpunkt C:

$$\begin{aligned}
&\vec{y} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}, \ |\vec{y}| = 20\,, \ \vec{y}' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \\
&\vec{z} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \end{pmatrix}, \ |\vec{z}| = 25\,, \ \vec{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&\vec{y}' + \vec{z}' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \ \text{bzw. } \vec{w}_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \\
&\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \vec{w}_C = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man berechnet nun wie üblich den Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender (etwa der durch A und durch B, Ergebnis wie angegeben) und überprüft dann, ob dieser auf der dritten Winkelhalbierenden liegt.
c) Wir berechnen die Fußpunkte der Lote von M auf die Dreiecksseiten $g(A,B)$ bzw. $g(A,C)$ bzw. $g(B,C)$. Dazu benötigen wir zunächst Parameterdarstellungen für diese Geraden. Wir benuzten $O = M$:

$$\begin{aligned}
X \in g(A,B) &\iff \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \\
X \in g(A,C) &\iff \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MA} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \\
X \in g(B,C) &\iff \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{MB} + t \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Bestimmmungen des Lotfußpunktes $X \in g(A,B)$ und des Abstandes $d(M,X)$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MX} \perp \overrightarrow{AB} \iff \left(\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + 3r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \iff r = \frac{1}{3} \\
&\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \\
&d(M,X) = \sqrt{9+16} = 5
\end{aligned}$$

Bestimmmungen des Lotfußpunktes $X \in g(A,C)$ und des Abstandes $d(M,X)$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MX} \perp \overrightarrow{AC} \iff \left(\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix} + 4r \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 0 \iff r = \frac{1}{4}\\
&\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix},\\
&d(M,X) = \sqrt{16+9} = 5\,.
\end{aligned}$$

Bestimmmungen des Lotfußpunktes $X \in g(B,C)$ und des Abstandes $d(M,X)$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MX} \perp \overrightarrow{BC} \iff \left(\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix} + 25r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff r = \frac{2}{5}\\
&\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix},\\
&d(M,X) = 5\,.
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass alle Abstände gleich sind. Der Kreis um M mit dem Radius 5 verläuft also durch alle Lotfußpunkte. Der Kreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks, dies ist der *Inkreis.*

Anmerkung:

1. Mit der Hesse'schen Abstandsformel lässt sich der Abstand schneller berechnen. (Übung!)
2. Wie der Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten der Umkreismittelpunkt ist, so ist der Schnittpunkt aller Winkelhalbierenden der Inkreismittelpunkt. Man zeigt dazu, dass ein Punkt genau dann auf einer Winkelhalbierenden liegt, wenn er von beiden Schenkeln des Winkels denselben Abstand hat. Daraus folgt dann, dass der Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden auch auf der dritten liegt und der Mittelpunkt eines Kreises ist, der alle drei Seiten berührt.