Übungen (E1)

1) a) Wie groß ist der Widerstand eines Bügeleisens, das bei 220 V Spannung von einem Strom der Stärke 4 A durchflossen wird?
   b) Wie ändert sich die Stromstärke, wenn die Spannung auf 200 V sinkt?
2) An eine unveränderliche Spannungsquelle von $U = 10\,\mathrm{V}$ wird jeweils ein Draht mit dem Widerstand 0,5 Ω, 1 Ω, 2 Ω, . . . , 10 Ω, 15 Ω, 20 Ω angeschlossen. Skizzieren Sie in einem Diagramm die Stromstärken I in Abhängigkeit vom Widerstand R. Um welche Art von Abhängigkeit handelt es sich?
3) a) Ein Draht hat den Widerstand 100 Ω. Wie groß wird R, wenn man die Länge verdreifacht und den Durchmesser verdoppelt?
   b) Wir dehnen den gegebenen Draht gleichmäßig auf die doppelte Länge, ohne die Masse zu ändern. Wie ändert sich der Widerstand?
4) Ein Kupferdraht ist 10 m lang und hat einen Querschnitt von 0,1 mm^2. Wie groß ist sein Widerstand? Welche Spannung muss man an seine Enden legen, damit ein Strom der Stärke 0,3 A fließt?
5) Eine 1 km lange Kupferleitung hat 10 Ω Widerstand. Sie soll durch eine gleich lange Aluminium-Leitung mit gleichem Widerstand ersetzt werden. Vergleichen Sie Durchmesser und Masse.
6) Ein Kupferdraht auf einer Spule hat die Querschnittsfläche 0,002 mm^2. Legt man an seine Enden 20 V Spannung an, so fließt ein Strom von 1 mA. Wie lang ist der Draht?
7) Der Wolframdraht einer Glühlampe hat 0,04 mm Durchmesser. Legt man an die Lampe 220 V, so fließt ein Strom der Stärke 0,2 A. Wie lang ist der Draht? [Der spezifische Widerstand ist im Betrieb 7mal so groß wie bei 18 ^{0}C.]

Spezifische Widerstände bei 18 ^{0}C in $\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$:

Kupfer	0,016
Aluminium	0,028
Wolfram	0,05

Dichten in $\mathrm{g/cm}^3$:

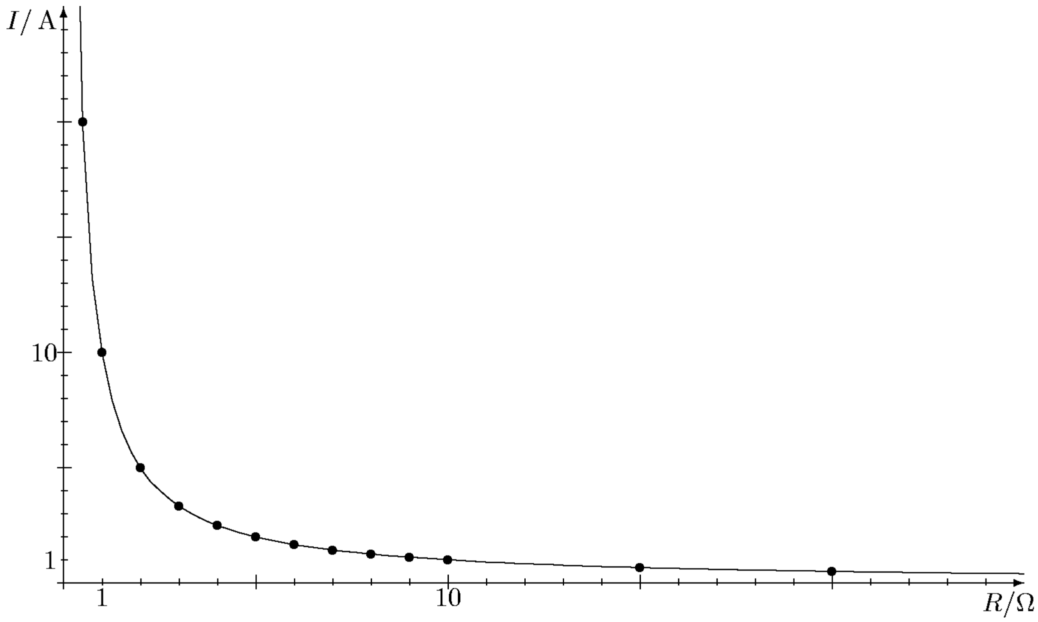
Kupfer	8,93
Aluminium	2,70

Übungen (E1) — Lösungen

1) a) Es ist definitionsgemäß $R = \frac{U}{I} = \frac{220\,\text{V}}{4\,\text{A}} = 55\,\Omega$.
b) Bei konstantem Widerstand sind U und I proportional, also sinkt die Stromstärke im gleichen Verhältnis wie die Spannung, also auf $\frac{200}{220} = \frac{10}{11}$, d. h. auf 91% des Ausgangswertes. Konkret sind dies $\frac{10}{11} \cdot 4\,\text{A} = 3{,}64\,\text{A}$.
2) Wir berechnen zunächst die Stromstärken $I = \frac{U}{R}$:

$R/\,\Omega$	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$I/\,\text{A}$	20	10	5	3,3	2,5	2	1,7	1,4	1,3	1,1	1	0,7	0,5

Stellt man diese Werte graphisch dar (I in Abhängigkeit von R), so erhält man folgenden Verlauf:

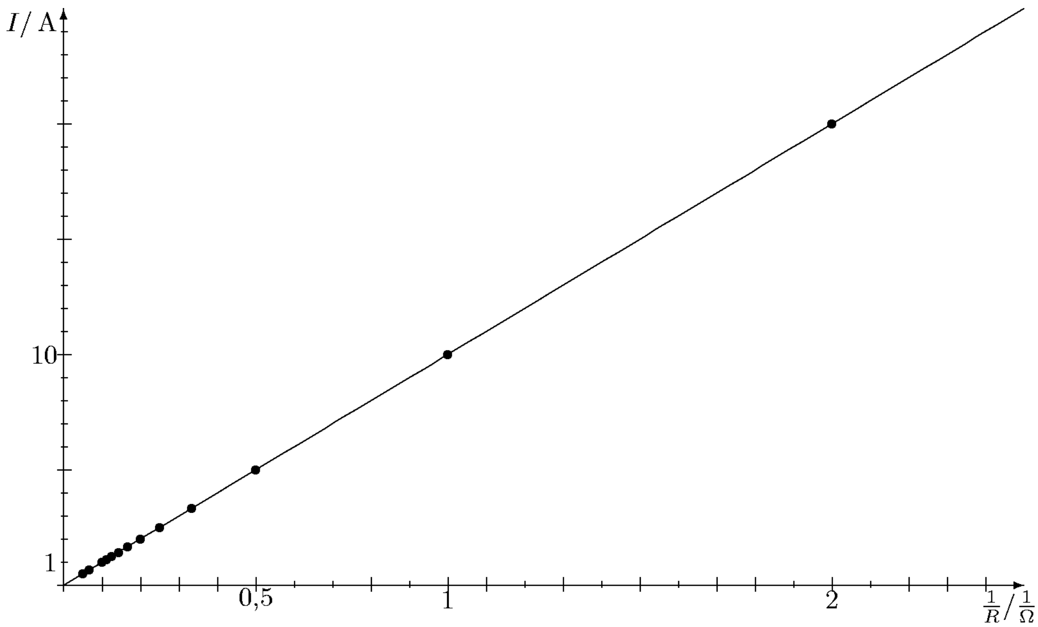


Man erkennt, dass mit steigendem Widerstand die Stromstärke sinkt: Je größer R, desto kleiner I. Wenn man nun vermutet, dass eine *umgekehrte* Proportionalität vorliegt, so kann man dies zeichnerisch[1)] folgendermaßen überprüfen. Man stellt nun nicht I in Abhängigkeit von R, sondern von $\frac{1}{R}$ in einem Diagramm dar. In unserem Beispiel ergibt sich

$R/\,\Omega$	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\frac{1}{R}/\frac{1}{\Omega}$	2	1	0,5	0,33	0,25	0,2	0,17	0,14	0,13	0,11	0,1	0,067	0,05
$I/\,\text{A}$	20	10	5	3,3	2,5	2	1,7	1,4	1,3	1,1	1	0,7	0,5

1) Natürlich kann man dies auch rechnerisch feststellen, indem man zeigt, dass das *Produkt* konstant ist; und dies braucht man auch nicht wirklich zu zeigen, denn nach dem Ohmschen Gesetz ist $U = R \cdot I$ und U ist als konstant vorausgesetzt.

woran man die Proportionalität von I und $\frac{1}{R}$ unmittelbar erkennt (Quotient 10). Und die graphische Darstellung



ist offensichtlich eine Ursprungsgerade. Damit ist I proportional zu $\frac{1}{R}$ oder mit anderen Worten: I ist umgekehrt proportional zu R (bei konstanter Spannung).

3) a) Der Widerstand R ist proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A. Da A proportional ist zum Quadrat d^2 des Durchmessers, ist insgesamt $R \sim \frac{l}{d^2}$. Bei Verdreifachung von l verdreifacht sich R, bei Verdopplung von d vervierfacht sich d^2 und damit sinkt der Widerstand auf ein Viertel: Der neue Widerstand beträgt $\frac{3}{4}$ des ursprünglichen, also $75\,\Omega$.
b) In diesem Falle wird die Masse und damit das Volumen des Drahtes nicht verändert, bei Verdopplung der Länge muss sich daher der Querschnitt halbieren: $l' = 2l$ und $A' = \frac{A}{2}$. Wegen der doppelten Länge verdoppelt sich R und wegen des halben Querschnitts verdoppelt sich R nochmals, insgesamt steigt der Widerstand auf das Vierfache: $R = 400\,\Omega$.

4) Mit dem angegebenen Wert für den spezifischen Widerstand $\rho_{\mathrm{Cu}} = 0{,}016\,\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ ergibt sich

$$R = \rho_{\mathrm{Cu}} \cdot \frac{10\,\mathrm{m}}{0{,}1\,\mathrm{mm}^2} = 1{,}6\,\Omega\,.$$

Die benötigte Spannung ist also

$$U = R \cdot I = 1{,}6\,\Omega \cdot 0{,}3\,\mathrm{A} = 0{,}48\,\mathrm{V}\,.$$

5) Will man nur einen Vergleich in Form von Verhältniszahlen, so sind die Angaben über Länge und Widerstand unerheblich. Es gilt vielmehr bei festem R und festem l:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \implies \frac{\rho}{A} = \frac{R}{l} \text{ ist konstant } \iff A \sim \rho\,.$$

Die Querschnittsfläche A ist zum spezifischen Widerstand ρ proportional, wächst also im gleichen Verhältnis wie dieser. Daher gilt für die Querschnittsflächen A_{Cu} und A_{Al}:

$$\frac{A_{\mathrm{Al}}}{A_{\mathrm{Cu}}} = \frac{0{,}028}{0{,}016} = \frac{7}{4} = 1{,}75\,.$$

Wegen $A \sim d^2$ ergibt das für die Durchmesser

$$\frac{d_{\text{Al}}}{d_{\text{Cu}}} = \sqrt{1{,}75} = 1{,}32\,.$$

Der Durchmesser des Aluminiumdrahtes ist etwa 32% größer als der des Kupferdrahtes.
Da die Masse zur Dichte (hier mit D bezeichnet) und Querschnittsfläche (bei konstanter Länge) proportional ist, erhält man das Massenverhältnis

$$\frac{m_{\text{Al}}}{m_{\text{Cu}}} = \frac{D_{\text{Al}} \cdot l \cdot A_{\text{Al}}}{D_{\text{Cu}} \cdot l \cdot A_{\text{Cu}}} = \frac{2{,}7}{8{,}93} \cdot \frac{7}{4} = 0{,}53\,.$$

Will man jedoch nicht nur *vergleichen,* sondern die absoluten Werte für Durchmesser und Masse ermitteln, so muss man aus den gegebenen Daten $l = 1\,\text{km}$ und $R = 10\,\Omega$ zunächst den Querschnitt A und daraus dann den Durchmesser und die Masse des Kupferdrahtes bestimmen:

$$\begin{aligned}
R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{A_{\text{Cu}}} \iff A_{\text{Cu}} &= \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{R} = 1{,}6\,\text{mm}^2\,, \quad \text{also} \\
d_{\text{Cu}} = 2r_{\text{Cu}} &= 2\sqrt{\frac{A_{\text{Cu}}}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1{,}6\,\text{mm}^2}{\pi}} = 1{,}43\,\text{mm} \quad \text{und} \\
m_{\text{Cu}} &= D_{\text{Cu}} \cdot l \cdot A_{\text{Cu}} = D_{\text{Cu}} \cdot \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l^2}{R} \\
&= 8{,}93\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 0{,}016\,\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{10^6\,\text{m}^2}{10\,\Omega} = 14{,}29\,\text{kg}\,, \\
d_{\text{Al}} &= \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot d_{\text{Cu}} = 1{,}89\,\text{mm}\,, \\
m_{\text{Al}} &= 0{,}53 \cdot m_{\text{Cu}} = 0{,}53 \cdot 14{,}29\,\text{kg} = 7{,}56\,\text{kg}\,.
\end{aligned}$$

6) Wir berechnen zunächst den Widerstand $R = \frac{U}{I} = \frac{20\,\text{V}}{0{,}001\,\text{A}} = 20\,\text{k}\Omega$ und damit ergibt sich dann

$$R = \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{l}{A} \iff l = \frac{R \cdot A}{\rho_{\text{Cu}}} = \frac{20\,\text{k}\Omega \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}^2}{0{,}016\,\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}} = 2500\,\text{m}\,.$$

7) Der Widerstand bei Betriebstemperatur ist

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220\,\text{V}}{0{,}2\,\text{A}} = 1100\,\Omega\,.$$

Bei $18\,^0$C beträgt der Widerstand also $R_{18} = \frac{1100}{7}\,\Omega = 157{,}14\,\Omega$. Daraus ermitteln wir nun die Drahtlänge wie in der vorangehenden Aufgabe:

$$l = \frac{R_{18} \cdot \pi r^2}{\rho_{\text{W}}} = \frac{157{,}14\,\Omega \cdot \pi \cdot (0{,}02\,\text{mm})^2}{0{,}05\,\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}} = 3{,}95\,\text{m}\,.$$