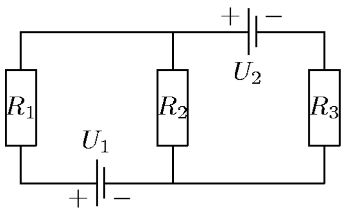
Übungen (E4)

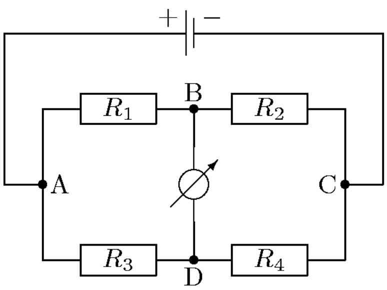
1) Bestimmen Sie für die nachstehende Schaltung die Stromstärken und -richtungen in allen Widerständen, wenn folgende Daten gegeben sind:

$$U_1 = 9\,\mathrm{V}\,,\ U_2 = 0{,}5\,\mathrm{V}\,,\quad R_1 = 1\,\Omega\,,\ R_2 = 2\,\Omega\,,\ R_3 = 3\,\Omega\,.$$



2) Wheatstone-Brücke zur Bestimmung eines Widerstandes.
a) In der nachfolgend skizzierten Schaltung betragen die Widerstände

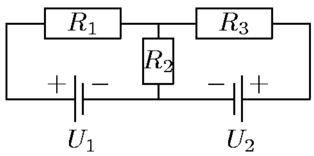
$$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}\,,\quad R_2 = 7\,\mathrm{k\Omega}\,,\quad R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}\,.$$



Bei einer Spannung $U = 60\,\mathrm{V}$ fließe kein Strom durch das Amperemeter. Bestimmen Sie den Widerstand R_4.
b) Was geschieht bei Verdopplung der Spannung?
c) Leiten Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung von R_4 her.

3) a) Bestimmen Sie die Stromstärken durch alle Widerstände der nachfolgenden Schaltung, wenn folgende Größen gegeben sind:

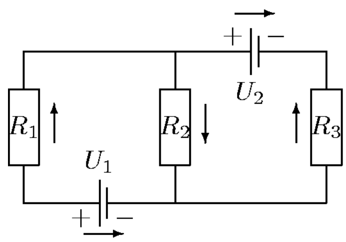
$$U_1 = 24\,\mathrm{V}\,,\ U_2 = 6\,\mathrm{V}\,,\quad R_1 = 20\,\Omega\,,\ R_2 = 30\,\Omega\,,\ R_3 = 8\,\Omega\,.$$



Geben Sie auch die jeweiligen Strom*richtungen* an.
b) Bestimmen Sie Formeln zur allgemeinen Berechnung von I_1, I_2, I_3 und überprüfen Sie sie an Ihren Ergebnissen aus a).
c) Zeigen Sie allgemein, dass die Stromrichtung in R_2 immer dieselbe ist, während die anderen Stromrichtungen sich je nach den gegebenen Daten ändern können.
d) Welche Ströme ergeben sich, wenn der Widerstand R_2 unendlich groß wird?
e) Geben Sie jeweils Bedingungen für $I_1 = 0$ bzw. $I_3 = 0$ an, ohne dass R_1 bzw. R_3 unendlich groß werden.

Übungen (E4) — Lösungen

1) Zunächst legen wir die Messrichtungen für die Ströme I_k durch die Widerstände fest und zeichnen die Messrichtungen für die Spannungen U_j an den Quellen ein:



Es gibt 2 Knoten, also 2 Knotengleichungen, von denen aber (wie wir allgemein gezeigt haben) eine überflüssig ist. [Die beiden Gleichungen sind äquivalent, wie man auch unschwer direkt sieht.]
Knotengleichung: $I_1 + I_3 = I_2$. Diese benutzen wir auch direkt, um die Unbekannte I_2 zu eliminieren.
Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} & R_1I_1 + R_2I_2 = U_1 \quad \wedge \quad R_2I_2 + R_3I_3 = U_2 \\ \iff & R_1I_1 + R_2(I_1 + I_3) = U_1 \quad \wedge \quad R_2(I_1 + I_3) + R_3I_3 = U_2 \\ \iff & (R_1 + R_2)I_1 + R_2I_3 = U_1 \quad \wedge \quad R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = U_2 \end{aligned}$$

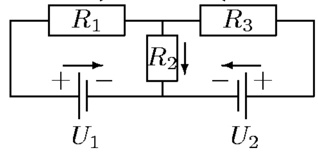
Wir setzen die angegebenen Werte für die Widerstände ein und dividieren durch die Einheit Ω:

$$\begin{aligned} & (R_1 + R_2)I_1 + R_2I_3 = U_1 \quad \wedge \quad R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = U_2 \\ \iff & 3I_1 + 2I_3 = 9\,\frac{\mathrm{V}}{\Omega} \quad \wedge \quad 2I_1 + 5I_3 = 0{,}5\,\frac{\mathrm{V}}{\Omega} \\ \iff & 3I_1 + 2I_3 = 9\,\mathrm{A} \quad \wedge \quad 11\mathrm{I}_3 = -16{,}5\,\mathrm{A} \iff I_3 = -1{,}5\,\mathrm{A} \quad \wedge \quad I_1 = 4\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Mit der Knotengleichung ergibt sich noch $I_2 = I_1 + I_3 = 2{,}5\,\mathrm{A}$. Da I_3 negativ ist, ist die tatsächliche Stromrichtung entgegengesetzt zur oben eingezeichneten Messrichtung: der Strom in R_3 fließt von oben nach unten. Das bedeutet außerdem, dass in der Spannungsquelle U_2 der Strom von + zu − fließt: Die Spannungsquelle gibt keine Energie ab, sondern nimmt Energie auf!

2) c) Siehe Skript: $\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{R_2}{R_4}$.
a) Anwendung dieser Formel ergibt $R_4 = 3{,}5\,\mathrm{k}\Omega$.
b) Alle Stromstärken verdoppeln sich; das Ampèremeter bleibt stromlos.

3) a) Wir legen wieder die Messrichtungen fest:



Es gibt 2 Knoten und nur eine wesentliche Knotengleichung: $I_2 = I_1 + I_3$, mit der wir I_2 eliminieren.
Die Maschengleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
& R_1I_1 + R_2I_2 = U_1 \quad \wedge \quad R_3I_3 + R_2I_2 = U_2 \\
\iff & (R_1 + R_2)I_1 + R_2I_3 = U_1 \quad \wedge \quad R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_3 = U_2 \\
\iff & 50I_1 + 30I_3 = 24\,\mathrm{A} \quad \wedge \quad 30I_1 + 38I_3 = 6\,\mathrm{A} \\
\iff & 50I_1 + 30I_3 = 24\,\mathrm{A} \quad \wedge \quad 100I_3 = -42\,\mathrm{A} \iff I_3 = -0{,}42\,\mathrm{A} \wedge I_1 = 0{,}732\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Also ergibt sich $I_1 = 732\,\mathrm{mA}$, $I_3 = -420\,\mathrm{mA}$ und $I_2 = I_1 + I_3 = 312\,\mathrm{mA}$. Da I_3 negativ ist, ist die Fließrichtung des Stroms durch R_3 *entgegengesetzt* zur oben eingezeichneten Messrichtung, d. h. der Strom in R_3 fließt von links nach rechts.
b) Wir müssen das oben aufgestellte Gleichungssystem allgemein lösen:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (R_1 + R_2)I_1 & + & R_2I_3 & = & U_1 \\ R_2I_1 & + & (R_2 + R_3)I_3 & = & U_2 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{bmatrix} R_1I_1 & - & R_3I_3 & = & U_1 - U_2 \\ R_2I_1 & + & (R_2 + R_3)I_3 & = & U_2 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{bmatrix} R_1I_1 & - & R_3I_3 & = & U_1 - U_2 \\ & & (R_1R_2 + R_1R_3 + R_3R_2)I_3 & = & R_1U_2 - R_2U_1 + R_2U_2 \end{bmatrix} \\
\iff & I_3 = \frac{R_1U_2 + R_2U_2 - R_2U_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \quad R_1I_1 = U_1 - U_2 + R_3I_3 \\
\iff & I_3 = \frac{R_1U_2 + R_2U_2 - R_2U_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \quad I_1 = \frac{R_3U_1 + R_2U_1 - R_2U_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formeln, kann man die numerischen Resultate von a) bestätigen. Aber auch die Ergebnisse von Aufgabe 1) ergeben sich daraus, da die Schaltungen der Aufgaben 1) und 3) physikalisch gleichwertig sind!
c) Wir berechnen

$$I_2 = I_1 + I_3 = \frac{R_1U_2 + R_3U_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

und erkennen, dass $I_2 > 0$ ist. Dagegen kann $I_3 < 0$ werden, wenn nämlich $U_1 > \frac{R_1U_2 + R_2U_2}{R_2}$ gewählt wird. Genauso kann $I_1 < 0$ werden.
d) Man erhält die beiden Widerstände R_1 und R_3 in Reihenschaltung ($R = R_1 + R_3$) an einer Spannungsquelle der Spannung $U_1 - U_2 = 18\,\mathrm{V}$ und somit

$$-I_3 = I_1 = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_3}, \quad I_2 = 0\,.$$

Diese Ergebnisse erhält man auch, wenn man in den Formeln von b) und c) den Grenzübergang $R_2 \to \infty$ durchführt (demnächst im Mathematik-Unterricht).
e) Wegen der Symmetrie der Formeln für I_1 und I_3 genügt es, einen der Fälle zu behandeln:

$$I_1 = 0 \iff R_3U_1 + R_2U_1 = R_2U_2\,.$$

Man kann also 3 der vier Werte U_1, U_2, R_2, R_3 beliebig vorgeben und dann den vierten so wählen, dass $I_1 = 0$ wird. Entsprechendes gilt für $I_3 = 0$.