Übungen (E6)

1) Zwischen zwei Kondensatorplatten mit dem Abstand 5 cm und je 450 cm^2 Fläche liegt die Spannung $U = 10\,\text{kV}$.
   a) Wie groß sind Feldstärke E und die Flächenladungsdichte σ der felderzeugenden Ladungen? Welche Ladung trägt jede Platte?
   b) Wie ändern sich diese Werte, wenn man die Platten
   A) bei konstanter Plattenladung (Platten isoliert),
   B) bei konstanter Spannung (Quelle angeschlossen)
   auseinanderzieht?
   c) Welche Spannung muss man bei $d = 5\,\text{cm}$ Plattenabstand zwischen die Platten legen, damit sie 10 nC tragen?

2) Man hat ermittelt, dass bei schönem Wetter die Spannung gegen den negativ geladenen Erdboden um 1300 V zunimmt, wenn man jeweils 10 m höher steigt.
   a) Wie groß sind E und σ an der Erdoberfläche?
   b) Welche Ladung hätte die Erdkugel mit Radius 6370 km (überall schönes Wetter)?
   c) Welche Ladung trägt ein Metallflachdach von 300 m^2 Fläche, welche ein Sonnenanbeter (1 m^2)?

3) Ein Blockkondensator besteht aus zwei langen, bandförmigen Aluminiumfolien, die durch paraffingetränktes Papier als Isolator getrennt aufgerollt werden. Jeder Aluminiumstreifen eines solchen Blockkondensators habe eine Fläche von 20 m^2 Fläche. Das isolierende Dielektrikum sei 0,05 mm dick und die Dielektrizitätskonstante sei $\varepsilon_r = 2$.
   a) Wie groß sind Kapazität und Ladung bei 100 V?
   b) Wie lang müssten die 5 cm breiten Streifen sein, damit $C = 10\,\mu\text{F}$ wird?

4) Eine Leidener Flasche hat den mittleren Durchmesser 10 cm und ist am Grund ganz und an den Seiten 25 cm hoch mit Stanniol belegt. Welche Ladung nimmt sie bei 50 kV auf, wenn das Glas ($\varepsilon_r = 6$) 3 mm dick ist?

5) Die Kapazität eines Drehkondensators kann zwischen 100 pF und 1 nF geändert werden.
   a) Welche Ladung nimmt er jeweils bei 10 V auf?
   b) Man lädt den Drehkondensator bei 1 nF mit 10 V auf und trennt ihn von der Spannungsquelle. Dann verkleinert man die Kapazität des isolierten Kondensators auf 100 pF. Wie verhält sich dabei die Spannung?

6) Welche Energie enthält die in Aufgabe 4) mit 50 kV geladene Leidener Flasche? Auf welche Betrag würde die Energie steigen, wenn man die Spannung verdoppelt?

7) Zwei Kondensatoren von 10 μF und 30 μF werden parallel geschaltet. Welche Kapazität kommt ihnen gemeinsam zu? Begründen Sie dies auf der Basis der Definition der Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ und den Vorgängen in den Leitungen beim Auf- und Entladen! Was folgt also für die Kapazität parallel geschalteter Kondensatoren?

8) Lösen Sie die vorangehende Aufgabe für Reihenschaltung.

Übungen (E6) — Lösungen

1) a) In einem homogenen Feld der Feldstärke E (d. h. an allen Punkten hat die Feldstärke $\vec{E}$ denselben Betrag $|\vec{E}| = E$ und dieselbe Richtung) beträgt die Spannung zwischen zwei Punkten im Abstand d (gemessen in Richtung des Feldes):

$$U = E \cdot d\,.$$

Dies ist insbesondere auf das homogene Feld eines Plattenkondensators anwendbar. Beträgt also die Spannung zwischen den Platten $U = 10\,\mathrm{kV}$ und der Plattenabstand $d = 5\,\mathrm{cm}$, so erhalten wir die Feldstärke

$$E = \frac{U}{d} = \frac{10\,\mathrm{kV}}{5\,\mathrm{cm}} = \frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{V}}{5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 200000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,.$$

Für die hier benutzte Feldstärkeneinheit $1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ gilt

$$1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\,,$$

sie stimmt also mit der bei der Definition von $E = \frac{F}{q}$ festgelegten Feldstärkeneinheit $1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ überein!
Zur Ermittlung der Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$ auf jeder der Kondensatorplatten benutzen wir die

$$\begin{aligned} \text{elektrische Feldgleichung:} \quad & \sigma = \varepsilon_0 \cdot E\,, \\ \text{mit der elektrischen Feldkonstante:} \quad & \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Flächenladungsdichte

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \cdot 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \approx 17{,}7 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

und daraus die Ladung auf jeder der Platten

$$\begin{aligned} Q = \sigma \cdot A &= 17{,}7 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \cdot 450\,\mathrm{cm}^2 = 17{,}7 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \cdot 450 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 7965 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C} = 79{,}65 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} = 79{,}65\,\mathrm{nC}\,. \end{aligned}$$

b) Wir ziehen die Platten auseinander, also wächst d. Welche Werte sich wie ändern hängt nun zusätzlich davon ab, welche anderen Werte unverändert bleiben.
<u>A)</u> Nach Abtrennung von der Spannungsquelle bleibt die Ladung Q auf den Platten konstant. Also bleibt wegen der Feldgleichung $\varepsilon_0 \cdot E = \sigma = \frac{Q}{A}$ auch die Feldstärke unverändert. Aus $U = E \cdot d$ entnehmen wir, dass bei konstantem E und wachsendem d die Spannung *steigt,* und zwar proportional zu d. Das Anwachsen der Spannung bedeutet ein Anwachsen der Energie im Kondensator. Dies rührt daher, dass man beim Auseinanderziehen die Ladungen gegen die Feldkräfte bewegt und so Energie

zuführt.
B) Bleibt der Kondensator an die (unveränderte) Spannungsquelle angeschlossen, so bleibt U konstant. Wegen $E = \frac{U}{d}$ sinkt dabei die Feldstärke, also nimmt gemäß der Feldgleichung $\varepsilon_0 \cdot E = \sigma$ auch die Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$ ab, d. h. die Ladung Q je Platte sinkt. Es fließen also Ladungen von den Platten zurück zur Spannungsquelle, und zwar soviele, dass die Spannung zwischen den Platten auf dem Niveau der Spannungsquelle bleibt. Die durch das Auseinanderziehen zugefügte Energie wird von der Spannungsquelle aufgenommen.
c) Es ist

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0} = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \varepsilon_0} = \frac{10\,\mathrm{nC} \cdot 5\,\mathrm{cm}}{450\,\mathrm{cm}^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}}$$
$$= \frac{10 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}}{450 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}} = 1255{,}49\,\mathrm{V}$$

2) Da in immer gleichen Abständen die Spannung um gleiche Beträge zunimmt, ist das Feld homogen.
a) Die Feldstärke beträgt damit

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1300\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{m}} = 130\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

und gemäß der elektrischen Feldgleichung erhält man als Flächenladungsdichte

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \cdot 130\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1150{,}5 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = 1{,}15 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\,.$$

b) Die Oberfläche A einer Kugel vom Radius r ist $A = 4\pi r^2$, also für die Erdkugel

$$A = 4\pi \cdot (6370\,\mathrm{km})^2 = 509904363{,}78\,\mathrm{km}^2 = 509{,}9 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^2\,,$$
$$Q = \sigma \cdot A = 1{,}15 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \cdot 509{,}9 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^2 = 586645\,\mathrm{C}\,.$$

c) Bei $A = 300\,\mathrm{m}^2$ erhält man

$$Q = \sigma \cdot A = 1{,}15 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \cdot 300\,\mathrm{m}^2 = 345{,}15 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} = 345{,}15\,\mathrm{nC}$$

und für $A = 1\,\mathrm{m}^2$ entsprechend

$$Q = \sigma \cdot A = 1{,}15 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \cdot 1\,\mathrm{m}^2 = 1{,}15\,\mathrm{nC}\,.$$

3) a) Da sich bei einem Blockkondensator auf beiden Seiten einer ‘Platte’ das elektrische Feld aufbaut, muss hier mit der doppelten Fläche $A = 40\,\mathrm{m}^2$ gerechnet werden. Wir erhalten so als Kapaziät

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \cdot 2 \cdot \frac{40\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}} = 141{,}6 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 14{,}16\,\mu\mathrm{F}$$

und bei $U = 100\,\mathrm{V}$ ergibt sich als Ladung Q im Kondensator

$$Q = C \cdot U = 14{,}16\,\mu\mathrm{F} \cdot 100\,\mathrm{V} = 1{,}42\,\mathrm{mC}\,.$$

Um die Ladung $Q = 100\,\mu\mathrm{C}$ zu tragen, muss die Spannung

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{100\,\mu\mathrm{C}}{14{,}16\,\mu\mathrm{F}} = 7{,}06\,\mathrm{V}$$

betragen.

b) Wir bestimmen zunächst die für eine Kapazität $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ benötigte Fläche A, indem wir die Proportionalität von C und A benutzen. Dann ergibt sich mit den Ergebnissen von a)

$$\frac{A}{20\,\mathrm{m}^2} = \frac{10\,\mu\mathrm{F}}{14{,}16\,\mu\mathrm{F}} = 0{,}71 \iff A = 0{,}71 \cdot 20\,\mathrm{m}^2 = 14{,}12\,\mathrm{m}^2\,.$$

Bei einer Breite von $b = 5\,\mathrm{cm}$ ergibt dies für die Länge l des Streifens

$$l = \frac{A}{b} = \frac{14{,}12\,\mathrm{m}^2}{5\,\mathrm{cm}} = \frac{14{,}12\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 282{,}49\,\mathrm{m}\,.$$

4) Wir berechnen zunächst die Fläche des Kondensators. Die Grundfläche ist eine Kreisfläche $A_1 = \pi r^2$ mit $r = 5\,\mathrm{cm}$, während die Seitenfläche durch den Kreisumfang $U = 2\pi r$ und die Höhe der Stanniolfläche $h = 25\,\mathrm{cm}$ gegeben ist: $A_2 = U \cdot h$. Als Gesamtfläche ergibt sich so

$$A = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = \pi \cdot (5\,\mathrm{cm})^2 + 2\pi \cdot 5\,\mathrm{cm} \cdot 25\,\mathrm{cm} = 863{,}94\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Als Ladung erhält man

$$\begin{aligned} Q = C \cdot U = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \cdot U &= 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \cdot 6 \cdot \frac{863{,}94\,\mathrm{cm}^2}{3\,\mathrm{mm}} \cdot 50\,\mathrm{kV} \\ &= 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} \cdot 6 \cdot \frac{863{,}94 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} \cdot 50 \cdot 10^3\,\mathrm{V} = 764585{,}11 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \\ &= 76{,}46\,\mu\mathrm{C}\,. \end{aligned}$$

5) a) Aus $Q = C \cdot U$ erhalten wir als maximale und minimale Ladungsmenge

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= C_{\max} \cdot U = 1\,\mathrm{nF} \cdot 10\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{nC}\,, \\ Q_{\min} &= C_{\min} \cdot U = 100\,\mathrm{pF} \cdot 10\,\mathrm{V} = 1000\,\mathrm{pC} = 1\,\mathrm{nC}\,. \end{aligned}$$

b) Trennt man den Kondensator von der Spannungsquelle ab, so bleibt die Ladungsmenge auf ihm unverändert; sie beträgt $Q = 10\,\mathrm{nC}$. Reduziert man nun die Kapazität, so muss sich wegen $C = \frac{Q}{U}$ bei konstanter Ladung Q die Spannung vergrößern: Bei fester Ladung sind Kapazität und Spannung *umgekehrt* proportional zueinander. Reduziert man also die Kapazität auf $100\,\mathrm{pF} = 0{,}1\,\mathrm{nF}$, also auf ein Zehntel, so muss die Spannung auf das Zehnfache, also $100\,\mathrm{V}$ steigen.

6) Die Energie eines geladenen Kondensators beträgt

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U\,.$$

Mit den für die Leidener Flasche bereits berechneten Werten ergibt sich

$$W = \frac{1}{2}QU = 0{,}5 \cdot 76{,}46\,\mu\text{C} \cdot 50\,\text{kV} = 1911{,}46 \cdot 10^{-3}\,\text{CV} = 1911{,}46\,\text{mJ} = 1{,}91\,\text{J}\,.$$

Aus der Energieformel $W = \frac{1}{2}CU^2$ folgt bei Verdopplung der Spannung (wegen der Konstanz von C) eine Vervierfachung der Energie des Kondensators.
Vorsicht: Die Formel $W = \frac{1}{2}QU$ besagt nicht, dass W zu U proportional ist, da Q nicht konstant ist, sondern sich mit U ändert.

7) Bei parallel geschalteten elektrischen Bauteilen liegt an beiden Bauteilen die gleiche Spannung U an. Die Ladungen auf den Kondensatoren betragen dann

$$Q_1 = C_1 \cdot U = 10\,\mu\text{F} \cdot U\,, \qquad Q_2 = C_2 \cdot U = 30\,\mu\text{F} \cdot U\,.$$

Auf beiden Kondensatoren zusammen beträgt die Ladung dann

$$Q = Q_1 + Q_2 = 40\,\mu\text{F} \cdot U\,.$$

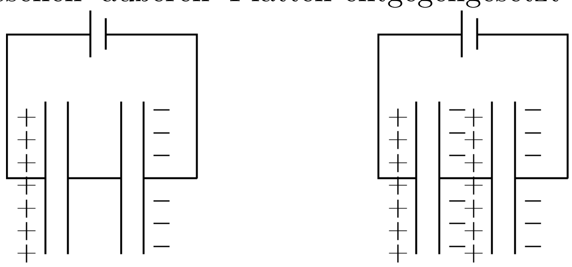
Damit haben die parallel geschalteten Kondensatoren zusammen eine Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2 = 40\,\mu\text{F}\,.$$

Bei parallel geschalteten Kondensatoren addieren sich die einzelnen Kapazitäten zur Gesamtkapazität:

$$\boxed{\text{Parallelschaltung:} \qquad C = C_1 + C_2.}$$

8) Legt man an zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren eine Spannung an, so werden die angeschlossenen ‘äußeren’ Platten entgegengesetzt gleich stark aufgeladen



(siehe linke Skizze). Diese Ladungen erzeugen nun durch Influenz auf den inneren Platten ebenfalls gleich große entgegengesetzte Ladungen, so dass schließlich alle Platten dieselbe Ladungsmenge Q tragen (siehe rechte Skizze). Die angelegte Gesamtspannung teilt sich (bei einer Reihenschaltung) in zwei Teilspannungen auf: $U = U_1 + U_2$. Damit erhalten wir für die Kapazität der Reihenschaltung

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} \iff \frac{1}{C} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\,.$$

Bei in Reihe geschalteten Kondensatoren addieren sich die *Kehrwerte* der Kapazitäten:

$$\boxed{\text{Reihenschaltung:} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.}$$