Übungen (E7)

1) Eine Kugel sei mit $Q = 5{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ geladen und habe die Masse $m = 0{,}4\,\mathrm{g}$. Sie hänge an einem $l = 1{,}80\,\mathrm{m}$ langen Faden zwischen den senkrecht stehenden Platten eines Plattenkondensators (Skizze!). Dabei entfernt sich die Kugel um $d = 15\,\mathrm{mm}$ aus der Ruhelage. Wie groß ist die Feldstärke E des homogenen Feldes?

2) Wie groß ist der Ausschlag d einer Probekugel der Masse $m = 0{,}25\,\mathrm{g}$, die an einem Faden der Länge $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ in einem elektrischen Feld der Stärke $E = 5{,}6 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ hängt, wenn sie eine Ladung $Q = 6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ trägt?

3) Berechnen Sie die Kraft, mit der sich zwei gleich geladene Körper mit der Ladung
a) $Q = 35\,\mu\mathrm{C}$ im Abstand $r = 12\,\mathrm{cm}$,
b) $Q = 1\,\mathrm{C}$ im Abstand $r = 1\,\mathrm{m}$ abstoßen.

4) Zwei (sehr) kleine Metallkugeln von je $3\,\mathrm{g}$ Masse hängen an je einem $4\,\mathrm{m}$ langen Seidenfaden. Die Fäden sind am selben Punkt befestigt, so dass sich die Kugeln berühren. Die Kugeln werden elektrisch aufgeladen und entfernen sich $6\,\mathrm{cm}$ voneinander. Wie groß ist die Ladung auf jeder der Kugeln?

5) Zwei Punktladungen $Q_1 = +2\,\mathrm{C}$ und $Q_2 = +8\,\mathrm{C}$ haben den Abstand $d = 1\,\mathrm{m}$. In welchem Punkt zwischen den Ladungen ist die Feldstärke null?

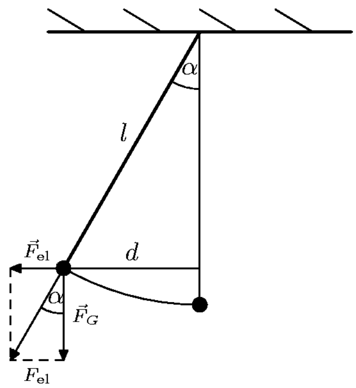
6) Auf einem geradlinigen dünnen Draht der Länge l sei die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Bestimmen Sie die Feldstärke E im Abstand r vom Draht für $r \ll l$. [Tip: Betrachten Sie die Ladungsdichte auf der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius r.]

7) An zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks mit den Kantenlängen $a = 2\,\mathrm{cm}$ und $b = 4\,\mathrm{cm}$ befinden sich zwei elektrische Punktladungen $Q_1 = +3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ und $Q_2 = -4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke E an den beiden anderen Ecken des Rechtecks? Welche Richtungen haben sie?

8) Der Abstand zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom sei $d = 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Das Proton trägt die Ladung $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, das Elektron eine gleich große negative.
a) Wie groß ist die Coulomb-Kraft, mit der sich beide Teilchen anziehen?
b) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen beiden Teilchen? ($m_\mathrm{p} = 1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$)
c) In welchem Verhältnis stehen elektrostatische Anziehungskraft und Gravitationskraft? Hängt das Verhältnis vom Abstand der Teilchen ab?

Übungen (E7) — Lösungen

1) Die Richtung des Fadens muss gleich der Richtung der resultierenden Kraft sein, da andernfalls der Faden bewegt würde. Wir benutzen wieder die Skizze von Übung (E5). Daraus ergibt sich



$$\sin\alpha = \frac{d}{l} = \frac{1{,}5}{180} = 0{,}0083 \iff \alpha = 0{,}48^0 .$$

Weiter gilt

$$F_{\mathrm{el}} = F_{\mathrm{G}} \cdot \tan\alpha = mg\tan\alpha$$

und damit

$$E = \frac{F_{\mathrm{el}}}{Q} = \frac{mg\tan\alpha}{Q} = \frac{4\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\tan 0{,}48^0}{5{,}2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}} = 628{,}87\frac{N}{C}$$

Hinweis: Bei derart kleinen Winkeln ($< 5^0$) kann man vereinfachend $\sin\alpha = \tan\alpha$ benutzen.

2) Wir benutzen die bereits in der vorangehenden Aufgabe hergeleiteten Beziehungen:

$$\tan\alpha = \frac{F_{\mathrm{el}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{EQ}{mg} = \frac{560\cdot 6\cdot 10^{-8}}{25\cdot 10^{-5}\cdot 9{,}81} = 0{,}0137 \iff \alpha = 0{,}78^0 .$$

Also

$$d = l\cdot\sin\alpha = 1{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}0137 = 2{,}05\,\mathrm{cm} .$$

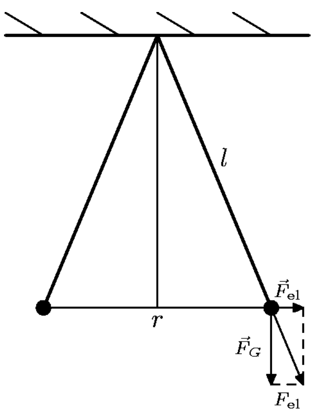
3) Hier handelt es sich um elementare Rechnungen:

a) $$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\cdot r^2} = \frac{35^2\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2}{4\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 0{,}12^2\,\mathrm{m}^2} = 764{,}93\,\mathrm{N}$$

b) $$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\cdot r^2} = \frac{1\,\mathrm{C}^2}{4\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 1\,\mathrm{m}^2} = 8{,}99\cdot 10^9\,\mathrm{N}$$

Man beachte den extrem großen Wert in b). Er zeigt die Stärke der elektrischen Kräfte (siehe auch Aufgabe 9)).

4) Die Ladung verteilt sich gleichmäßig auf die beiden Kugeln, so dass beide dieselbe Ladung q tragen. Damit wirkt zwischen den Kugeln in horizontaler Richtung die abstoßende Coulombkraft



$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{mit } r = 6\,\mathrm{cm} .$$

Zugleich wirkt auf die Kugeln in vertikaler Richtung die Gewichtskraft

$$F_{\mathrm{G}} = mg = 3\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 29{,}43\,\mathrm{mN} .$$

Wenn die Kugeln in Ruhe sind, muss die Resultierende beider Kräfte genau die Richtung des Fadens haben. Dessen Winkel mit der Vertikalen erhält man aus

$$\sin\alpha = \frac{r/2}{l} = \frac{3\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{m}} = 7{,}5\cdot 10^{-3} \iff \alpha = 0{,}43^0\,.$$

Damit gilt für die beteiligten Kräfte

$$\frac{F}{F_\mathrm{G}} = \tan\alpha \approx \sin\alpha = 7{,}5\cdot 10^{-3} \iff \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = F_\mathrm{G}\cdot 7{,}5\cdot 10^{-3}$$
$$\iff q^2 = 4\pi\varepsilon_0 r^2\cdot mg\cdot 7{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}^2 = 0{,}88\cdot 10^{-16}\,\mathrm{C}^2$$
$$\iff q = \sqrt{0{,}88}\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C} = 9{,}4\,\mathrm{nC}$$

5) Seien r_1 und r_2 die Abstände zu den jeweiligen Massen, also $r_1 + r_2 = 1\,\mathrm{m}$. Gesucht ist der Punkt, in dem die beiden Kräfte auf eine positive Ladung gleich sind, aber entgegengesetzt gerichtet. Da die Coulombkraft proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ist, gilt

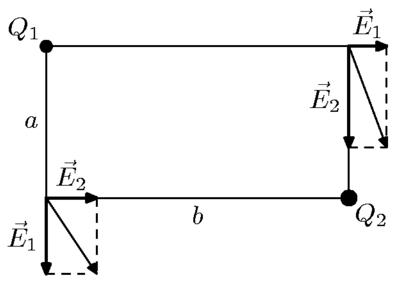
$$F_1 = F_2 \iff \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{Q_2}{r_2^2} \iff \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{Q_2}{Q_1} = 4 \iff \frac{r_2}{r_1} = 2\,.$$

Die Gesamtstrecke von 1 m muss also im Verhältnis 2 : 1 aufgeteilt werden, d. h. $r_2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{m}$, $r_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}$.

6) Wir bestimmen die Feldstärke mit Hilfe der elektrischen Feldgleichung $\varepsilon_0 E = \sigma$ aus der Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$ im Abstand r vom Draht. Um diese Flächenladungsdichte zu bestimmen, gehen wir wie beim elektrischen Feld einer Punktladung vor: Wir umschließen den Draht mit einem Metallzylinder vom Radius r und der Länge l. Die Ladung auf dem Draht influenziert auf der Innenseite des Metallzylinders eine gleich große entgegengesetzte Ladung. Dadurch entsteht auf der Außenseite dieselbe Ladung Q wie auf dem Draht. Sie verteilt sich auf die Zylinderoberfläche. Diese setzt sich aus dem Zylindermantel $A = 2\pi r\cdot l$ und den beiden Kreisflächen an den Enden zusammen. Da $r \ll l$ vorausgesetzt ist, kann man die Kreisflächen vernachlässigen und erhält so

$$\varepsilon_0 E = \sigma = \frac{Q}{2\pi r\cdot l} \iff E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,.$$

7) Wir berechnen die von den Ladungen Q_i erzeugten Feldstärken E_i in den beiden Punkten. Die Richtung der Feldstärke $\vec{E}_1$ ist von Q_1 weg gerichtet, da Q_1 positiv ist, während $\vec{E}_2$ zur Ladung Q_2 hin gerichtet ist. Da diese Richtungen rechtwinklig zueinander sind, kann man die resultierende Feldstärke mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Die Richtung von $\vec{E}$ bildet mit dem Vektor $\vec{E}_1$ einen Winkel, für den gilt $\tan\alpha = \frac{E_2}{E_1}$.



In der oberen rechten Ecke gilt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{3\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 4^2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 1{,}69\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
E_2 &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{4\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 2^2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}99\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
E &= \sqrt{E_1^2+E_2^2} = \sqrt{1{,}69^2+8{,}99^2}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 9{,}15\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
\angle(\vec{E}_1,\vec{E}) &= \arctan\frac{E_2}{E_1} = \arctan\frac{8{,}99}{1{,}69} = 79{,}38^0\,.
\end{aligned}
$$

In der unteren linken Ecke gilt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{3\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 2^2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 6{,}74\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
E_2 &= \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{4\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 4^2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 2{,}25\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
E &= \sqrt{E_1^2+E_2^2} = \sqrt{6{,}74^2+2{,}25^2}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 7{,}11\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\,,\\
\angle(\vec{E}_1,\vec{E}) &= \arctan\frac{E_2}{E_1} = \arctan\frac{2{,}25}{6{,}74} = 18{,}43^0\,.
\end{aligned}
$$

8) Es ist

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{el}} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\cdot d^2} = \frac{1{,}6^2\cdot 10^{-38}\,\mathrm{C}^2}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}^2} = 23{,}02\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}\,,\\
F_{\mathrm{Grav}} &= G^*\cdot\frac{m_{\mathrm{e}}\cdot m_{\mathrm{p}}}{d^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\cdot\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}7\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{10^{-20}\,\mathrm{m}^2}\\
&= 1{,}03\cdot 10^{-47}\,\mathrm{N}\,.
\end{aligned}
$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte ist unabhängig vom Abstand, da beide Größen umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes sind. Man beachte die enorme Größe des Verhältnisses beider Kräfte:

$$
\frac{F_{\mathrm{el}}}{F_{\mathrm{Grav}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G^*\cdot m_e\cdot m_p} = 2{,}23\cdot 10^{39}\,.
$$

Dies zeigt, dass im Atom die Gravitationskräfte im Vergleich zu den elektrischen Feldkräften vernachlässigt werden können.