Übungen (E8)

1) Ein Kondensator ist mit der Spannung $U = 10\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Der Plattenabstand beträgt $d = 4\,\mathrm{cm}$. Ein Elektron löst sich aus der negativen Platte.
   a) Was geschieht?
   b) Welche Kraft und welche Beschleunigung erfährt das Elektron?
   c) Nach welcher Zeit trifft es auf der positiven Platte auf?
   d) Welche Geschwindigkeit hat es dann?
   e) Wie groß ist die kinetische Energie beim Aufprall?
   f) Was ändert sich, wenn der Plattenabstand $d = 6\,\mathrm{cm}$ beträgt?
2) Ein Elektron hat die kinetische Energie $W = 45000\,e\mathrm{V}$.
   a) Was bedeutet dies?
   b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Elektrons?
   c) Das Elektron tritt mit dieser Geschwindigkeit in ein homogenes elektrisches Feld ein (Punkt A). Die Feldstärke beträgt $E = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$. Feld und Geschwindigkeit haben gleiche Richtung und Orientierung.
   i) Welcher Art ist die nun folgende Bewegung des Elektrons?
   ii) Bis zu welchem Punkt B fliegt das Elektron von Punkt A aus in das Feld hinein?
   iii) Wie lange dauert der Flug von A bis B?
   iv) Wann und mit welcher Geschwindigkeit erreicht das Elektron wieder Punkt A?
   v) Wie groß ist die Spannung U_{AB} zwischen A und B?
3) a) Welche Spannung muss ein Elektron durchlaufen, um die Geschwindigkeit $v = 220\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ zu erreichen.
   b) Beantworten Sie Frage a) für die Lichtgeschwindigkeit $v = c$ (ohne die klassische Physik in Frage zu stellen).
4) Ein Elektron, das die Beschleunigungsspannung $U_\mathrm{a} = 150\,\mathrm{V}$ durchlaufen hat, fliegt senkrecht zum elektrischen Feld in die Mitte zwischen zwei parallele geladene Platten mit dem Abstand $d = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Zwischen den Platten liegt die Spannung $U = 250\,\mathrm{V}$.
   a) Wie lange dauert es, bis das Elektron auf eine der beiden Platten aufschlägt?
   b) Wie weit ist der Auftreffpunkt vom Rand der Platte entfernt?
5) In einer Braunschen Röhre sei die Beschleunigungsspannung $U_a = 1800\,\mathrm{V}$, der Ablenkkondensator hat den Plattenabstand $d = 6\,\mathrm{mm}$ sowie in Flugrichtung der Elektronen die Länge $l = 3\,\mathrm{cm}$.
   a) Mit welcher Geschwindigkeit treten die Elektronen in den Ablenkkondensator ein?
   b) Die Spannung zwischen den Platten des Ablenkkondensators sei $U = 100\,\mathrm{V}$. Wie groß ist die Ablenkung y des Elektrons von seiner ursprünglichen Bahn bei Verlassen des Kondensators?
   c) Welche Geschwindigkeit hat es dann?
   d) Welche Bahn durchläuft das Elektron nach Verlassen des Kondensators?

Übungen (E8) — Lösungen

1) a) Das Elektron wird durch die Feldkraft beschleunigt und fliegt zur positiven Platte.
b) Die Feldkraft ist

$$F = Eq = E \cdot e = \frac{Ue}{d} = \frac{10\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 4 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{N}\,.$$

Die Beschleunigung ergibt sich demzufolge als

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{4 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 4{,}4 \cdot 10^{13}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Beachten Sie die sehr geringe Kraft sowie die extreme Beschleunigung (aufgrund der extrem geringen Masse des Elektrons).
c) Das Elektron bewegt sich aus der Ruhe heraus mit konstanter Beschleunigung, der zurückgelegte Weg ist also $s = \frac{1}{2}at^2$. Bei der Strecke $s = d$ ergibt sich für die Zeit t

$$d = \frac{1}{2}at^2 \iff t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{4{,}4 \cdot 10^{13}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 4{,}27 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} = 42{,}66\,\mathrm{ns}\,.$$

d) Für die Geschwindigkeit gilt bei gleichmäßiger Beschleunigung

$$v = at = 4{,}4 \cdot 10^{13}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 42{,}66\,\mathrm{ns} = 187{,}52 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1875{,}23\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

e) Die kinetische Energie beträgt

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}5 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}88 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 16 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

Alternative: Diesen Wert kann man viel einfacher mit dem Prinzip der Energieerhaltung ermitteln. Wenn das Elektron eine Spannung $U = 10\,\mathrm{V}$ durchläuft, nimmt es die Energie

$$W = Uq = Ue = 10\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 16 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

auf. Diese wird in kinetische Energie umgewandelt. Daraus ergibt sich dann auch leicht die Endgeschwindigkeit v:

$$\frac{1}{2}mv^2 = Ue \iff v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} = \sqrt{\frac{20\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}88 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

f) Es wächst d auf das $\frac{3}{2}$-fache, also sinkt $E = \frac{U}{d}$ (bie gleichbleibender Spannung U) auf das $\frac{2}{3}$-fache. Genauso sinken Kraft F und Beschleunigung a auf $\frac{2}{3}$ ihres ursprünglichen Wertes. Wegen $a \sim \frac{1}{d}$ ist die Flugzeit $t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \sim \sqrt{\frac{d}{\frac{1}{d}}} = d$, wächst

also auch um 50%. Die Endgeschwindigkeit $v = at$ bleibt dann unverändert, da a umgekehrt und t direkt proportional zu d sind.
Dass die Endgeschwindigkeit unverändert bleibt ergibt sich wieder direkt aus Energieüberlegungen. Die Energie und damit die Endgeschwindigkeit sind nur von der Spannung U, nicht vom Abstand d abhängig, bleiben also unverädnert.

2) a) Dies ist die Energie, die ein Elektron erhält, wenn es eine Spannung von 45000 V durchläuft. Diese Energie beträgt in Joule:

$$W = 45000\,e\mathrm{V} = 45000\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 7{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}\,.$$

b) Es gilt

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = W \iff v = \sqrt{\frac{2W}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}26 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Beachten Sie die hohe Geschwindigkeit von 125794,18 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, dies sind 41,93% der Lichtgeschwindigkeit $c = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$.
c) i) Das Elektron wird durch die elektrische Feldkraft, die gegen Feldrichtung und Geschwindigkeit wirkt (negative Ladung!), abgebremst. Es bewegt sich in Feldrichtung bis zum Stillstand (Punkt B) und kehrt dort seine Bewegungsrichtung um. Es fliegt von B aus konstant beschleunigt zum Punkt A zurück.
Es ist eine gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit entgegengesetzt zur Beschleunigung.
Diese Bewegung entspricht genau einem senkrechten Wurf nach oben.
ii) Das Elektron hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\frac{2W}{m_e}} = 1{,}26 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Beschleunigung ist entgegengesetzt und beträgt

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} = \frac{1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 1{,}76 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Da es sich bei der Bewegung von A nach B um einen Bremsvorgang bis zur Ruhe handelt, gilt für den Bremsweg

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{und} \quad v_0 = at \implies s = \frac{v_0^2}{2a}\,.$$

Wir erhalten damit als Abstand zwischen A und B:

$$s = \frac{\sqrt{\frac{2W}{m_e}}^2}{2\frac{Ee}{m_e}} = \frac{W}{Ee} = \frac{45000\,e\mathrm{V}}{1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot e} = 45\,\mathrm{m}\,.$$

iii) Für die Flugdauer t gilt

$$s = \frac{1}{2}at^2 \iff t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{90\,\mathrm{m}}{1{,}76 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 7{,}15 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}\,.$$

iv) Das Elektron wird vom Punkt B ab aus der Ruhe beschleunigt mit der gleichen Beschleunigung a. Es erreicht daher den Punkt A mit derselben Geschwindigkeit

v_0, mit der es dort gestartet ist, jedoch in umgekehrter Richtung.
v) Im homogenen Feld der Stärke E herrscht zwischen zwei Punkten A und B im Abstand $d = 45\,\mathrm{m}$ die Spannung $U = Ed = 1000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 45\,\mathrm{m} = 45000\,\mathrm{V}$.
Alternative Lösung von ii), iv) und v) mit dem Prinzip der Energieerhaltung. Das Elektron hat bei A eine kinetische Energie von $45000\,e\mathrm{V}$. Am Punkt B ist die kinetische Energie verbraucht ($v = 0$) und vollständig in Lageenergie $W = F \cdot d = Ee \cdot d$ des elektrischen Feldes umgewandelt. Dabei ist d der Abstand zwischen A und B. Es ergibt sich wie oben $Ed \cdot e = 45000\,e\mathrm{V} \iff d = 45\,\mathrm{m}$.
Das Prinzip der Energieerhaltung ergibt auch unmittelbar, dass das Elektron den Punkt A wieder mit der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 erreicht.
Ebenfalls aus dem Prinzip der Energieerhaltung ergibt sich, dass die Spannung U_{AB} gleich der ursprünglichen Beschleunigungsspannung 45000 V ist, denn das Elektron wird aus der Ruhe bis zur Geschwindigkeit v_0 beschleunigt und dann von A ab aus dieser Geschwindigkeit wieder bis zur Ruhe bei B abgebremst. Also sind die Energiedifferenzen und damit die Spannungen identisch.
Lediglich die Frage nach der Flugzeit in iii) ist nicht durch Energieüberlegungen allein zu beantworten.

3) a) Durch Energievergleich erhält man

$$Ue = \frac{1}{2} m_e v^2 \iff U = \frac{m_e v^2}{2e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (220 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 137{,}64 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}\,.$$

Beachten Sie den äußerst geringen Wert von nur 0,14 V.
b) Mit der gleichen Beziehung ergibt sich

$$U = \frac{m_e v^2}{2e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (300 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 255{,}94 \cdot 10^3\,\mathrm{V}\,.$$

Dieser Wert ist fiktiv, da nach der speziellen Relativitätstheorie kein Körper auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann; bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit wächst die Masse des Körpers, so dass immer mehr Energie für immer geringere Geschwindigkeitszuwächse benötigt wird.

4) a) Das Elektron wird in Feldrichtung, also quer zu den Platten beschleunigt. Die Beschleunigung beträgt

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} = \frac{Ue}{dm_e} = \frac{250\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{0{,}015\,\mathrm{m} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 29{,}3 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Das Elektron schlägt auf einer der Platten auf, wenn es quer zu den Platten den Abstand $\frac{d}{2}$ zurückgelegt hat. Da das Elektron beim Eintritt in das Feld keine Geschwindigkeit in Feldrichtung hat, wird es also in dieser Richtung aus der Ruhe heraus beschleunigt. Für die Strecke $\frac{d}{2}$ bis zur Platte benötigt es daher die Zeit t mit

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \iff t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{0{,}015\,\mathrm{m}}{29{,}3 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2{,}26 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 2{,}26\,\mathrm{ns}\,.$$

b) Während dieser Zeit legt es in der ursprünglichen Richtung, also parallel zu den Platten, die Strecke $s = v_0 t$ zurück. Die Geschwindigkeit v_0 erreicht das Elektron durch die Beschleunigungsspannung U_a, also

$$U_a e = \frac{1}{2} m_e v_0^2 \iff v_0 = \sqrt{\frac{2U_a e}{m_e}} = \sqrt{\frac{300\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 7{,}26 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Die zurückgelegte Strecke parallel zu den Platten, also die Entfernung vom Anfang der Platten ist damit

$$s = v_0 t = 7{,}26 \cdot 10^6 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}26\,\mathrm{ns} = 16{,}43\,\mathrm{mm}\,.$$

5) a) Bei der Beschleunigungsspannung $U_a = 1800\,\mathrm{V}$ nimmt das Elektron die Energie $W = U_a \cdot e$ auf. Diese wird in kinetische Energie des Elektrons umgewandelt. Man erhält also

$$U_a \cdot e = \frac{1}{2} m_e v^2 \iff v^2 = \frac{2U_a e}{m_e}$$

$$\iff v = \sqrt{\frac{2U_a e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1800\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 25159\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Aufgrund dieser Geschwindigkeit benötigt das Elektron zum Durchqueren des Kondensators die Zeit

$$t = \frac{l}{v} = \frac{0{,}03\,\mathrm{m}}{25159\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 1{,}19\,\mathrm{ns}\,.$$

Während dieser Zeit wirkt auf das Elektron die elektrische Feldkraft $F_{\mathrm{el}} = E \cdot e = \frac{Ue}{d}$ im rechten Winkel zu den Kondensatorplatten. In dieser Richtung erfährt das Elektron also eine konstante Beschleunigung

$$a = \frac{F_{\mathrm{el}}}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} = \frac{Ue}{dm_e}$$

und damit die Ablenkung

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{Ue}{2dm_e} \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{Uel^2}{2dm_e \cdot \frac{2U_a e}{m_e}} = \frac{Ul^2}{4U_a d} = 2{,}08\,\mathrm{mm}\,.$$

c) Die Geschwindigkeit quer zum Feld beträgt bei Verlassen des Kondensators

$$v_y = at = \frac{Ue}{dm_e} \cdot t = \frac{100\,\mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} \cdot 1{,}19\,\mathrm{ns} = 3494\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Die Gesamtgeschwindigkeit beträgt damit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25159^2 + 3494^2}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 25400\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

d) Nach dem Verlassen des Kondensators wirken keine Kräfte auf das Elektron, so dass es eine geradlinige Bahn bis zum Bildschirm durchläuft. Die Richtung ist dabei die Richtung der (resultierenden) Geschwindigkeit beim Verlassen des Kondensators.
Der Winkel zwischen dieser geradlinigen Bahn und der urspünglichen Flugrichtung ergibt wie folgt:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{at}{v} = \frac{3494}{25159} = 0{,}14 \iff \alpha = \arctan 0{,}14 = 7{,}9^0\,.$$