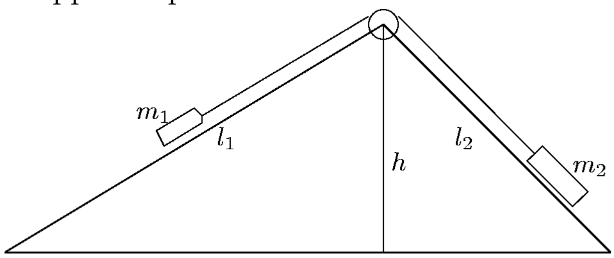
Übungen (M4)

1) a) Was versteht man unter der Neigung einer schiefen Ebene?
b) Wie berechnet sich die Hangabtriebskraft eines Körpers aus seinem Gewicht und der Neigung der schiefen Ebene?
c) Ein Kohlewagen von 1 t Masse erfährt auf ebener Strecke eine Reibungskraft von 50 N. Wie groß ist der Rollreibungskoeffizient? Wie groß müsste die Neigung der Schienenstrecke sein, damit der Wagen – einmal in Bewegung gesetzt – unverändert weiterrollt?

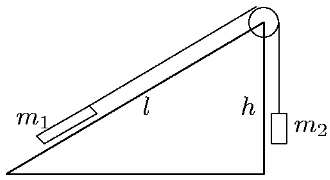
2) Ein Holzblock von 2 kg Masse wird über ein horizontal liegendes Brett von 2 m Länge verschoben.
a) Welche Kraft und welche Energie sind nötig, um den Körper vom Anfang bis zum Ende des Brettes zu verschieben? Wo 'bleibt' diese Energie?
b) Das Brett wird am Ende um 50 cm angehoben. Beantworten Sie jetzt erneut die Fragen von a).

3) Gegeben ist eine Doppelrampe wie skizziert. Sie habe eine Höhe von $h = 2\,\mathrm{m}$ und



Längen $l_1 = 4\,\mathrm{m}$ sowie $l_2 = 2{,}8\,\mathrm{m}$. Auf ihr sind zwei Massen mit einem Seil über eine (reibungsfreie) Rolle miteinander verbunden.
a) In welche Richtung wird dieses Gespann gezogen, wenn $m_1 = 500\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 300\,\mathrm{g}$ ist? Wie groß ist diese resultierende Kraft?
b) Beide Massen und die Rampe seien aus Holz gefertigt. Wie groß kann die Masse m_2 maximal sein, so dass das Gespann noch in Ruhe bleibt?
c) Beide Holzklötze werden mit Rädern versehen, wodurch sich ihre Masse jeweils um 50 g erhöht. Setzt sich das Gespann in Bewegung?

4) In nachfolgender Skizze sind 2 Massen über eine (reibungsfreie) Rolle verbunden.



Der Reibungskoeffizient für die Bewegung der Masse m_1 auf der schiefen Ebene sei μ. Es sei m_2 die kleinste Masse, die ohne weiteren Krafteinsatz die Masse m_1 hochziehen kann.
a) Zeigen Sie, dass m_2 zu m_1 proportional ist und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor.
b) Wie ändert sich dieser Proportionalitätsfaktor bei wachsender Neigung der schiefen Ebene von $n = 0$ bis $n = 1$ und konstantem μ?
c) Wie ändert er sich bei konstanter Neigung in Abhängigkeit von μ?

Reibungszahlen für Holz auf Holz:
$\mu_{\text{Gleit}} = 0{,}3, \quad \mu_{\text{Haft}} = 0{,}5, \quad \mu_{\text{Roll}} = 0{,}005.$

Übungen (M4) — Lösungen

1) a) Unter der Neigung einer schiefen Ebene verstehen wir hier das Verhältnis von Höhe h zur Länge l der schiefen Ebene. (Dies ist nicht der Anstieg!).
b) Die Hangabtriebskraft F_{H} ist das Produkt aus Gewicht F_{G} und Neigung der schiefen Ebene: $F_{\mathrm{H}} = \frac{h}{l} \cdot F_{\mathrm{G}}$.
Zusatz: Diese Beziehung lässt sich unmittelbar aus dem Satz von der Energieerhaltung ablesen: Um einen Körper vom Fuße der schiefen Ebene nach oben zu bringen, kann man ihn entweder direkt hochheben (Arbeitsaufwand Gewicht mal Hubhöhe $F_{\mathrm{G}} \cdot h$) oder ihn über die (reibungsfreie) Ebene hochziehen (Arbeitsaufwand Hangabtriebskraft mal Länge der Ebene $F_{\mathrm{H}} \cdot l$). Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie sind beide Energien gleich:

$$F_{\mathrm{G}} \cdot h = F_{\mathrm{H}} \cdot l\,, \text{ und daher: } \frac{F_{\mathrm{H}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{h}{l}\,.$$

c) Auf ebener Strecke ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft, also

$$F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{G}} \iff \mu_{\mathrm{R}} = \frac{F_{\mathrm{R}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{F_{\mathrm{R}}}{mg} = \frac{50\,\mathrm{N}}{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 5{,}1 \cdot 10^{-3}\,.$$

Damit der Wagen ungehindert weiterrollt, muss er insgesamt kräftefrei sein, die Reibungskraft muss gleich der Hangabtriebskraft sein. Wenn man wegen der geringen Neigung die Änderung der Normalkraft vernachlässigt, ergibt sich näherungsweise

$$F_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{H}} \iff \mu_{\mathrm{R}} \cdot F_{\mathrm{G}} = \frac{h}{l} \cdot F_{\mathrm{G}} \iff \mu_{\mathrm{R}} = \frac{h}{l}\,.$$

Die Neigung muss gleich dem Reibungskoeffizienten sein. Die Neigung beträgt also 0,51%. Dies bedeutet ein Gefälle von 5,1 mm auf 1 m oder 5,1 m auf 1 km.
Wir wollen nun genauer rechnen und auch die Änderung der Normalkraft auf der schiefen Ebene berücksichtigen. Es gilt (mit $n = \frac{h}{l}$ und $F_{\mathrm{H}} = nF_{\mathrm{G}}$)

$$F_{\mathrm{N}}^2 + F_{\mathrm{H}}^2 = F_{\mathrm{G}}^2 \iff F_{\mathrm{N}}^2 = F_{\mathrm{G}}^2 - n^2 \cdot F_{\mathrm{G}}^2 \iff F_{\mathrm{N}} = \sqrt{1-n^2} \cdot F_{\mathrm{G}}$$

und daher

$$\begin{aligned} nF_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{R}} = \mu F_{\mathrm{N}} = \mu\sqrt{1-n^2}F_{\mathrm{G}} &\iff n = \mu\sqrt{1-n^2} \\ \iff n^2 = \mu^2(1-n^2) \iff n^2(1+\mu^2) = \mu^2 &\iff n = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\,. \end{aligned}$$

Dies ergibt den (nur unwesentlich genaueren) Wert

$$n = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1 + 25{,}98 \cdot 10^{-6}}} = 5{,}096774 \cdot 10^{-3}\,.$$

2) a) Während der Verschiebung des Holzblockes muss die Gleitreibungskraft $F_{\text{Gleit}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$ aufgebracht werden. Da das Brett horizontal liegt, ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft und man erhält

$$F_{\text{Gleit}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_{\text{G}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot m \cdot g = 0{,}3 \cdot 2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 5{,}9\,\text{N}\,.$$

Als notwendige Energie ergibt sich daraus

$$W = F_{\text{Gleit}} \cdot l = 5{,}9\,\text{N} \cdot 2\,\text{m} = 11{,}8\,\text{J}\,.$$

Diese Energie wird in Reibungswärme umgewandelt und ist somit für den mechanischen Prozess ‘verloren’.
b) Die entstandene schiefe Ebene hat die Höhe $h = 50\,\text{cm}$. Die Länge der schiefen Ebene ist die Brettlänge $l = 2\,\text{m}$. Auf der schiefen Ebene muss man zusätzlich zur Reibungskraft die Hangabtriebskraft F_{H} aufbringen:

$$F_{\text{Zug}} = F_{\text{Gleit}} + F_{\text{H}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_{\text{N}} + n \cdot F_{\text{G}}\,.$$

Hierbei ist $n = \frac{h}{l} = \frac{50\,\text{cm}}{2\,\text{m}} = \frac{1}{4}$ die Neigung der schiefen Ebene.
Da die Hangabtriebskraft und die Normalkraft senkrecht zueinander wirken und als Resultierende die Gewichtskraft haben, gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$F_{\text{N}} = \sqrt{F_{\text{G}}^2 - F_{\text{H}}^2} = F_{\text{G}} \cdot \sqrt{1 - n^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} \cdot F_{\text{G}} = 0{,}97 \cdot F_{\text{G}}\,.$$

Für die notwendige Zugkraft ergibt sich so

$$F_{\text{Zug}} = (\mu_{\text{Gleit}} \cdot \sqrt{1 - n^2} + n) \cdot F_{\text{G}} = (0{,}3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16}} + 0{,}25) \cdot m \cdot g = 10{,}6\,\text{N}$$

und damit als benötigter Energieaufwand

$$W = F_{\text{Zug}} \cdot l = 10{,}6\,\text{N} \cdot 2\,\text{m} = 21{,}2\,\text{J}\,.$$

Diese Energie ist aber nur zum Teil in Wärme umgewandelt, ein Teil ist in Lageenergie gespeichert: $W = m \cdot g \cdot h = 2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 50\,\text{cm} = 9{,}81\,\text{J}$. Der Wärmeverlust beträgt hier also geringfügig weniger als in a): $21{,}2\,\text{J} - 9{,}81\,\text{J} = 11{,}4\,\text{J}$. Die Reduktion beträgt gerade 3%, da die Normalkraft um diesen Anteil gesunken ist.

3) a) Die Hangabtriebskräfte auf den Rampen seien $F_{1,\text{H}}$ und $F_{2,\text{H}}$:

$$F_{1,\text{H}} = \frac{h}{l_1} \cdot m_1 \cdot g\,, \quad F_{2,\text{H}} = \frac{h}{l_2} \cdot m_2 \cdot g\,.$$

Also

$$F_{1,\text{H}} > F_{2,\text{H}} \iff \frac{m_1}{l_1} > \frac{m_2}{l_2} \iff m_1 \cdot l_2 > m_2 \cdot l_1\,.$$

Mit den gegebenen Werten folgt: $F_{1,\text{H}} > F_{2,\text{H}}$: Das Gespann wird nach links gezogen. Die resultierende Kraft ist

$$F = F_{1,\text{H}} - F_{2,\text{H}} = h \cdot g \cdot (\frac{m_1}{l_1} - \frac{m_2}{l_2}) = 2\,\text{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (\frac{0{,}5\,\text{kg}}{4\,\text{m}} - \frac{0{,}3\,\text{kg}}{2{,}8\,\text{m}}) = 0{,}35\,\text{N}\,.$$

c)(!) Die Massen erhöhen sich auf $m_1 = 550\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 350\,\mathrm{g}$. Die Resultierende der Hangabtriebskräfte ist

$$F_{1,\mathrm{H}} - F_{2,\mathrm{H}} = m_1 g n_1 - m_2 g n_2 = 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot (0{,}55\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5 - 0{,}35\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}71) = 0{,}25\,\mathrm{N}\,.$$

Die Rollreibungskräfte betragen zusammen

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{Roll} \cdot g \cdot (m_1 \cdot 0{,}87 + m_2 \cdot 0{,}7) = 0{,}005 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}55 \cdot 0{,}87 + 0{,}35 \cdot 0{,}7)\,\mathrm{N} = 0{,}04\,\mathrm{N}$$

Da die Resultierende der Hangabtriebskräfte (deutlich) größer als die Rollreibungskraft ist, setzt sich das Gespann (nach links) in Bewegung.
[Hinweis: Die Endergebnisse sind nicht mit den gerundeten Zwischenergebnissen ermittelt worden, sondern es wurde immer die volle Rechnergenauigkeit benutzt.]
b) Da nach der größten Masse m_2 gefragt ist, bis zu der *keine* Bewegung erfolgt, wird bei größerem m_2 eine Bewegung beginnen, und diese muss dann in Richtung von m_2 (!) verlaufen. Die Ursache einer solchen Bewegung ist die in Richtung m_2 wirkende resultierende Kraft aus den beiden Hangabtriebskräften, also $F_{2,\mathrm{H}} - F_{1,\mathrm{H}}$ (!). Die kleinste Kraft, ab der Bewegung auftritt ist die der *Haft*reibungskraft für das Gespann; sie beträgt (mit $\mu = \mu_\mathrm{Haft} = 0{,}5$):

$$F_\mathrm{Haft} = \mu \cdot (F_{1,\mathrm{N}} + F_{2,\mathrm{N}}) = \mu g \cdot \left(\sqrt{1-n_1^2} \cdot m_1 + \sqrt{1-n_2^2} \cdot m_2\right).$$

Also erhalten wir folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}
&F_{2,\mathrm{H}} - F_{1,\mathrm{H}} = \mu(F_{1,\mathrm{N}} + F_{2,\mathrm{N}}) \\
\iff\ & m_2 g \cdot n_2 - m_1 g \cdot n_1 = \mu g\Big(m_1 \cdot \sqrt{1-n_1^2} + m_2 \cdot \sqrt{1-n_2^2}\Big) \\
\iff\ & m_2 \cdot \left(n_2 - \mu\sqrt{1-n_2^2}\right) = m_1 \cdot \left(n_1 + \mu\sqrt{1-n_1^2}\right) \\
\iff\ & m_2 = m_1 \cdot \frac{n_1 + \mu\sqrt{1-n_1^2}}{n_2 - \mu\sqrt{1-n_2^2}}
\end{aligned}$$

Mit den angegebenen Maßen der beiden Rampen erhält man die Neigungen

$$n_1 = \frac{h}{l_1} = \frac{2\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,, \quad n_2 = \frac{h}{l_2} = \frac{2\,\mathrm{m}}{2{,}8\,\mathrm{m}} = 0{,}71$$

und daraus dann die Bedingung

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}87}{0{,}71 - 0{,}5 \cdot 0{,}7} = 500\,\mathrm{g} \cdot 2{,}56 = 1280{,}3\,\mathrm{g}\,.$$

4) a) Die Bedingung an die Masse m_2 lautet: Das Gewicht $F_{2,\mathrm{G}}$ muss die Hangabtriebskraft $F_{1,\mathrm{H}}$ sowie die Reibungskraft $F_{1,\mathrm{R}}$ der Masse m_1 ausgleichen:

$$F_{2,\mathrm{G}} = F_{1,\mathrm{H}} + F_{1,\mathrm{R}}\,.$$

Nun gelten folgende Proportionalitäten:

$$F_{1,\mathrm{H}} \sim F_{1,\mathrm{G}} \sim m_1 \quad \text{und} \quad F_{1,\mathrm{R}} \sim F_{1,\mathrm{N}} \sim F_{1,\mathrm{G}} \sim m_1\,.$$

Sind zwei Größen A, B zu derselben Größe C proportional, so ist auch ihre Summe $A + B$ dazu proportional: $A \sim C\,,\ B \sim C \implies A + B \sim C$. Also folgt hier:

$$m_2 \sim F_{2,\mathrm{G}} = F_{1,\mathrm{H}} + F_{1,\mathrm{R}} \sim m_1\,.$$

Ist $n = \frac{h}{l}$ die Neigung der schiefen Ebene, so gilt

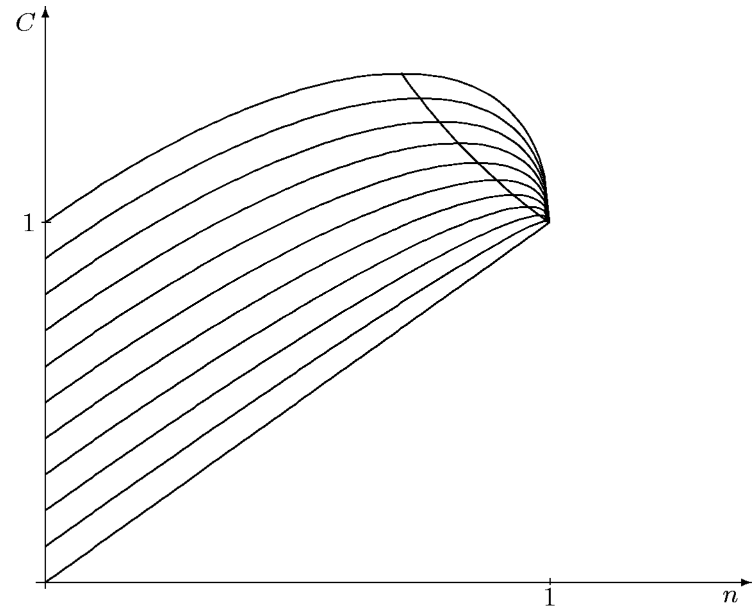
$$m_2 g = F_{2,\mathrm{G}} = F_{1,\mathrm{H}} + F_{1,\mathrm{R}} = n \cdot m_1 g + \mu\sqrt{1-n^2} \cdot m_1 g\,,$$

also

$$\frac{m_2}{m_1} = n + \mu\sqrt{1-n^2}\,.$$

b) Sei $C = n + \mu\sqrt{1-n^2}$ dieser Proportionalitätsfaktor. Für $n = 0$ (die 'schiefe' Ebene verläuft horizontal) erhält man $C = \mu$: das Massenverhältnis gibt den Reibungskoeffizienten an. Wächst n, so wächst zunächst[1)] auch C und nimmt für $n = 1$ (die 'schiefe' Ebene ist dann vertikal, die beiden Massen hängen an einer Rolle) den Wert $C = 1$ an: Die beiden Massen müssen gleich sein.
c) Bei festem n wächst der Proportionalitätsfaktor *linear* mit μ. Für $\mu = 0$ ist $C = n$: das Massenverhältnis bei einer reibungsfreien Ebene gibt die Neigung an. Mit wachsendem μ wächst auch C; der Steigungsfaktor ist $\sqrt{1-n^2}$, der Proportionalitätsfaktor zwischen Normal- und Gewichtskraft.

[1)] Eine genauere Untersuchung erfordert Kenntnisse der Differentialrechnung. Sie zeigt, dass C für $n = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ seinen größten Wert $C = \sqrt{1+\mu^2}$ annimmt und dann wieder sinkt bis zu $C = 1$ für $n = 1$. Die nachfolgenden Graphen zeigen den Verlauf von $C = n + \mu\sqrt{1-n^2}$ in Abhängigkeit von der Neigung n für verschiedene Werte von $\mu = 0, 0.1, \ldots, 1.0$:



Die querlaufende Kurve markiert die Lage der Maximalpunkte der jeweiligen Kurven.