Übungen (M8)

1) Ein Radfahrer beschleunigt aus der Ruhe in 10 s auf seine Höchstgeschwindigkeit von $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, behält diese 12 s bei und bremst dann in 5 s gleichmäßig bis zum Stand ab.
   a) Skizzieren Sie grob das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dieser Bewegung.
   b) Welche Wegstrecke hat der Radfahrer in dieser Zeit zurückgelegt?

2) Ein Top-Auto habe eine konstante Beschleunigung $a = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
   a) Wie lange braucht das Auto 'von 0 auf 100', d. h. nach welcher Zeit erreicht es die Geschwindigkeit $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?
   b) Wie weit ist es dann gefahren?
   c) Wie groß sind Geschwindigkeit und Weg nach der halben Zeit?

3) Ein Körper erreicht bei konstanter Beschleunigung aus der Ruhe nach 45 m Weg die Geschwindigkeit $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wie lange hat die Beschleunigung gedauert?

4) Zwei PKW A und B fahren im 'Kopfabstand' 10 m mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der hintere (B) setzt mit konstanter Beschleunigung $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ zum Überholen an.
   a) Wann befindet sich B 10 m vor A und kann den Überholvorgang beenden?
   b) Welchen Weg hat er zwischenzeitlich zurückgelegt?
   [Tip zu a) und b): Rechnen Sie im Bezugssystem des PKW A.]
   c) Ihm kommt ein PKW C mit der konstanten Geschwindigkeit von $12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ entgegen. Wie groß muss der Abstand zwischen B und C bei Beginn des Überholvorganges mindestens sein, wenn ein Unfall gerade noch vermieden werden soll?

5) Ein Geschoss wird in einem Pistolenlauf von 15 cm Länge auf $400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt. Wie groß ist die Beschleunigung und wie lange dauert sie?

6) In der Stadt fährt ein Auto mit $36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Auf einer Ausfallstraße gibt der Fahrer mehr Gas und beschleunigt mit $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ auf $90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Wie lange dauert die Beschleunigung? Welche Strecke legt das Auto dabei zurück?

7) a) Was versteht man unter einer gleichförmigen und unter einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung?
   b) Zeichnen Sie das typische Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm für beide Bewegungsarten.
   c) Ein PKW beschleunigt gleichmäßig aus dem Stand (Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$) in 15 s auf $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dem PKW nähert sich von hinten ein Motorradfahrer mit der konstanten Geschwindigkeit von $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ des Starts des PKW befindet er sich 120 m hinter dem Auto. Zeichnen Sie auf Millimeter-Papier für das Zeitintervall $0\,\mathrm{s} \leq t \leq 15\,\mathrm{s}$ die Weg-Zeit-Diagramme beider Bewegungen in eine einzige Skizze.
   d) Kommt es zu einem Zusammenstoß? Beantworten Sie diese Frage zunächst aufgrund der Skizze, dann rechnerisch.

8) Ein Fahrzeug bremst aus der Geschwindigkeit v_0 mit konstanter Bremsverzögerung a bis zum Stillstand ab.
   a) Stellen Sie das Geschwindigkeits-Zeit- und das Weg-Zeit-Gesetz auf.
   b) Bestimmen Sie die Länge des Bremsweges. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie

Ihre Beobachtung als Gesetzmäßigkeit.

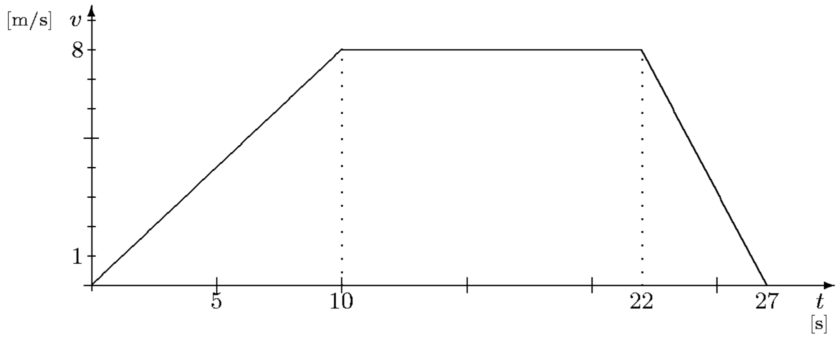
c) Die folgende Fahrschulregel gibt den Bremsweg in Metern: „Man streiche vom Zahlwert der in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ angegebenen Geschwindigkeit die Null und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst.“ (Beispiel: Bei 70 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ Geschwindigkeit beträgt der Bremsweg $7 \cdot 7 = 49$ Meter.) Bringen Sie diese Regel mit Ihrem Ergebnis von b) in Übereinstimmung. Welche Bremsverzögerung wird dabei zugrundegelegt?

9) Ein Eisenbahnzug hat eine Bremsverzögerung von $a = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
a) Wie schnell darf der Zug höchstens fahren, um auf der 1 km langen Strecke zwischen Vor- und Hauptsignal sicher zum Stehen zu kommen?
b) Nach welcher Bremsstrecke hat sich die ursprüngliche Geschwindigkeit halbiert?

10) Ein PKW bremst aus einer Geschwindigkeit von $v = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ (mit konstanter Bremsverzögerung) in 6 s zum Stillstand ab.
a) Wie groß ist die Bremsverzögerung, wie groß der Bremsweg?
b) Der Fahrer tritt in dem Moment auf die Bremse, in dem 60 m vor ihm ein Baum quer auf die Fahrbahn stürzt. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf das Hindernis auf?

Übungen (M8) — Lösungen

1) a) Nachfolgend eine Skizze des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms:



b) Die zurückgelegte Wegstrecke kann man aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm entnehmen, und zwar als Fläche unter der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve. Dies ergibt bei oben skizzierter Kurve:
Wegstrecke während des Beschleunigungs-Vorgangs (1. Dreiecksfläche)

$$\frac{1}{2} \cdot 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\,\text{s} = 40\,\text{m}$$

Wegstrecke während der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit (Rechtecksfläche)

$$8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12\,\text{s} = 96\,\text{m}$$

Wegstrecke während des Brems-Vorganges (2. Dreiecksfläche)

$$\frac{1}{2} \cdot 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5\,\text{s} = 20\,\text{m}$$

Damit beträgt der gesamte zurückgelegte Weg 156 m.

2) a) Die Beschleunigungszeit ergibt sich aus

$$v = at \iff t = \frac{v}{a} = \frac{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{100 \cdot \frac{1000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 9{,}26\,\text{s}\,.$$

b) Die Beschleunigungsstrecke ist demzufolge

$$s = \frac{1}{2} \cdot at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 9{,}26^2\,\text{s}^2 = 128{,}6\,\text{m}\,.$$

c) Da Geschwindigkeit und Zeit (bei konstanter Beschleunigung) proportional sind, ist nach der halben Beschleunigungszeit auch die Geschwindigkeit halb so groß: $v = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Dagegen ist die Beschleunigungsstrecke proportional zum *Quadrat* der Zeit, also ist die Strecke nach der halben Zeit nur ein Viertel der Gesamtstrecke: $s = 32{,}15\,\text{m}$.

3) Sei t die Beschleunigungszeit, dann gilt $v = at \iff a = \frac{v}{t}$ und damit

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot vt \iff t = \frac{2s}{v} = \frac{90\,\mathrm{m}}{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 3\,\mathrm{s}\,.$$

4) a) Gemäß dem Tip wählen wir als Bezugssystem das Fahrzeug A, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit von $v_0 = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bewegt. Im Bezugssystem des PKW's A ruht B zunächst und beschleunigt dann. Dabei beträgt auch aus Sicht des Fahrzeugs A die Beschleunigung von B $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, da die *Änderung* der Geschwindigkeit des PKW B im Bezugssystem von A genauso groß ist wie aus der Sicht eines ruhenden Beobachters am Straßenrand.
Damit führt B aus der Sicht von A eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung durch, und zwar aus der Ruhe heraus. Die Frage a) bedeutet nun: Wann hat B bei seiner beschleunigten Bewegung 20 m zurückgelegt? Also

$$20\,\mathrm{m} = s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\,.$$

Mit obigem Wert für a ergibt sich die Gleichung $t^2 = 20\,\mathrm{s}^2$ und damit eine Überholzeit von

$$t = \sqrt{20}\,\mathrm{s} \approx 4,47\,\mathrm{s}\,.$$

b) Während des Überholvorganges hat B in Bezug auf A 20 m zurückgelegt. Gleichzeitig hat sich aber der PKW A mit der Geschwindigkeit v_0 fortbewegt, also eine Strecke von

$$v_0 \cdot t = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{20}\,\mathrm{s} \approx 67{,}1\,\mathrm{m}$$

zurückgelegt. Insgesamt hat also B während des Überholvorganges eine Strecke von $67,1\,\mathrm{m} + 20\,\mathrm{m} = 87,1\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.
c) Wenn den Fahrzeugen A und B ein Fahrzeug C mit $12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Geschwindigkeit entgegenkommt, so legt dieses während des Überholvorganges eine Strecke von

$$12\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{20}\,\mathrm{s} \approx 53{,}7\,\mathrm{m}$$

zurück. Um also den Unfall soeben zu vermeiden, muss bei Beginn des Überholvorganges der Abstand zwischen Fahrzeug B und C mindestens

$$87,1\,\mathrm{m} + 53,7\,\mathrm{m} = 140,8\,\mathrm{m}$$

betragen.

5) Sei t die Beschleunigungszeit, dann gilt $v = at \iff a = \frac{v}{t}$ und damit

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot vt \iff t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}{400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}75\,\mathrm{ms}\,.$$

Aus der Beschleunigungszeit ergibt sich dann die Beschleunigung durch

$$a = \frac{v}{t} = \frac{400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}75\,\mathrm{ms}} = 533333{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

6) Es gilt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \iff \Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{(90-36)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{\frac{54}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 7{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Da die Beschleunigung nicht aus der Ruhe heraus erfolgt, kommt zu der Strecke $s = \frac{1}{2}at^2$, die bei Beschleunigung aus der Ruhe heraus zurückgelegt würde, die Strecke hinzu, die man bei konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zurücklegt:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 7{,}5\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 7{,}5^2\,\mathrm{s}^2 = 131{,}25\,\mathrm{m}\,.$$

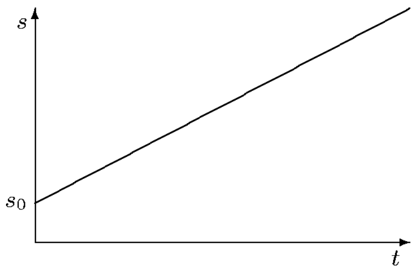
7) a) Eine *gleichförmige* Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden, oder mit anderen Worten: deren Geschwindigkeit konstant ist.

Gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0:

Weg-Zeit-Gesetz: $s = s_0 + v_0 \cdot t$

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v = v_0$ konstant

Weg-Zeit-Diagramm:



Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

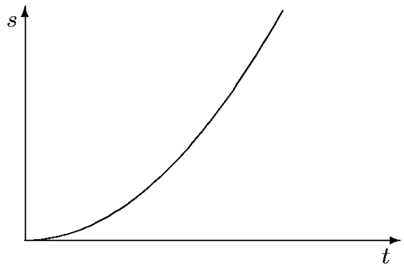
b) Eine *gleichmäßig beschleunigte* Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der sich die Momentangeschwindigkeit in gleichen Zeitabschnitten um den gleichen Betrag ändert, d. h. deren Momentangeschwindigkeit proportional zur Zeit ist.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung a
(bei Start aus der Ruhe)

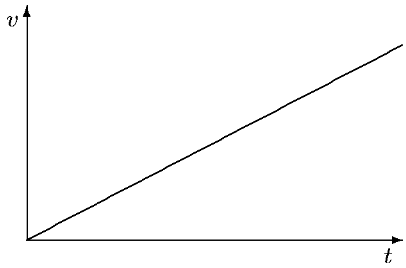
Weg-Zeit-Gesetz: $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v = a \cdot t$

Weg-Zeit-Diagramm:



Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:



c),d) Die (konstante) Beschleunigung des PKW-Fahrers beträgt

$$a = \frac{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{15\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

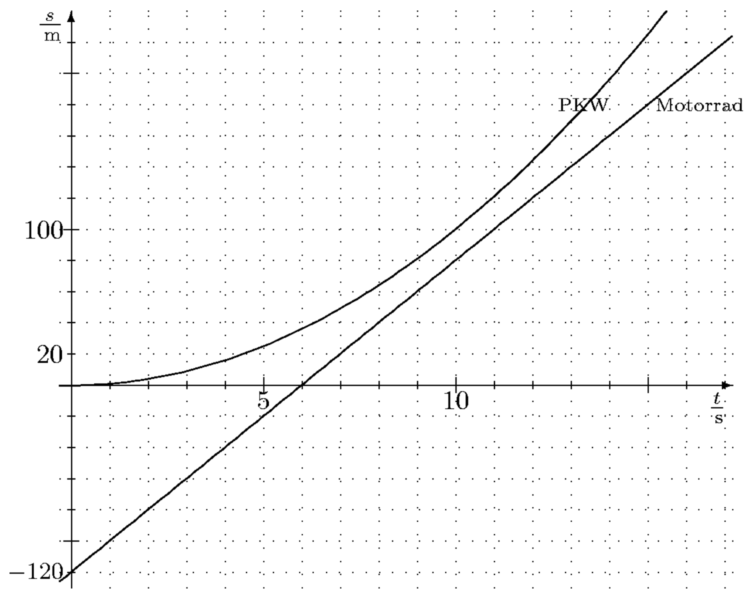
Das Weg-Zeit-Gesetz des PKW's ist gegeben durch

$$s_{\mathrm{PKW}}(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Die Bewegung des Motorrades ist gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_{\mathrm{M}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Da er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ aber 120 m hinter dem PKW befindet, ist sein Weg-Zeit-Gesetz gegeben durch

$$s_{\mathrm{M}}(t) = -120\,\mathrm{m} + v_{\mathrm{M}} \cdot t\,.$$

Nachfolgend eine Skizze der Weg-Zeit-Diagramme:



Aus der Skizze entnehmen wir, dass es nicht zu einem Zusammenstoß kommt, da sich die beiden Weg-Zeit-Kurven nicht schneiden.
Rechnerisch kann man dies wie folgt feststellen: Zum Zusammenstoß kommt es, wenn der Abstand d beider Fahrzeuge 0 wird, wenn also für ein t gilt

$$d(t) = s_{\mathrm{PKW}}(t) - s_{\mathrm{M}}(t) = 0\,.$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$0 = d(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + 120\,\mathrm{m} - v_{\mathrm{M}} \cdot t\,.$$

Setzt man die obigen Werte ein, so erhält man (für $t = x\,\mathrm{s}$ und $d(t) = y\,\mathrm{m}$):

$$y = x^2 - 20x + 120 = 0\,.$$

Diese Gleichung hat *keine* Lösung. (Mittels quadratischer Ergänzung erhält man $y = (x - 10)^2 + 20$, also beträgt der Abstand immer mindestens 20 m. Diesen Mindestabstand haben die beiden Fahrzeug zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$.)
Alternativ kann man den Mindestabstand auch folgendermaßen ermitteln: Statt des Abstandes betrachte man den Geschwindigkeitsunterschied $v_{\mathrm{M}} - v_{\mathrm{PKW}}$. Solange dieser positiv ist, nähert sich das Motorrad dem PKW, wenn er jedoch negativ wird, wächst der Abstand wieder. Der geringste Abstand ist also erreicht, wenn beide Geschwindigkeiten gleich sind:

$$v_{\mathrm{M}} = v_{\mathrm{PKW}} \iff 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = a \cdot t = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t \iff t = 10\,\mathrm{s}\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$ ist der Abstand $d(t)$ minimal. Für $t = 10\,\mathrm{s}$ ergibt sich $d(t) = 20\,\mathrm{m}$. Dass dieser minimale Wert von $d(t)$ positiv ist, bedeutet zugleich, dass es nicht zu einem Zusammenstoss gekommen ist.

8) a) Der Körper hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und wird dann mit der Bremsverzögerung a abgebremst. Da Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ und Beschleunigung $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet sind, erhält man

$$v = v_0 - at\,, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,,$$

wenn der Bremsvorgang an der Stelle $s_0 = 0$ beginnt.

b) Die Dauer des Bremsvorganges ist die Zeit t, bei der $v = 0$ wird, also

$$0 = v_0 - at \iff t = \frac{v_0}{a}\,,$$

und der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ist

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a \cdot (\frac{v_0}{a})^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a}\,.$$

Der Bremsweg von der Geschwindigkeit v_0 bis zum Stillstand ist genau gleich der Beschleunigungsstrecke von der Ruhe bis zur Endgeschwindigkeit v_0. Dies gilt jedoch nur für Start aus der Ruhe bzw. Bremsen bis zum Stillstand.

c) Als Formel lautet die Fahrschulregel

$$s = (\frac{v_0}{10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}})^2\,\mathrm{m} = (\frac{v_0}{\frac{10}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}})^2\,\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{7{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\,.$$

Dies entspricht genau der obigen Bremswegformel mit $2a = 7{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, d. h. $a = 3{,}86\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

9) a) Mit der Bremswegformel der vorangehenden Aufgabe a) erhält man

$$1000\,\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \iff v_0 = \sqrt{2000}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 44{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 161\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

b) Wenn die Hälfte der Geschwindigkeit erreicht ist, verbleibt noch die Hälfte der Bremszeit ($v \sim t$). Die dann noch verbleibende Bremsstrecke beträgt ein Viertel der Gesamtbremsstrecke ($s \sim t^2$), bis zu diesem Zeitpunkt wurden also drei Viertel zurückgelegt: Die gesuchte Strecke beträgt $750\,\mathrm{m}$.

10) a) Die Bremsverzögerung beträgt

$$a = \frac{v}{t} = \frac{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{6\,\mathrm{s}} = \frac{100}{3{,}6 \cdot 6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Der Bremsweg beträgt dann

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (6\,\mathrm{s})^2 = 83{,}33\,\mathrm{m}\,.$$

b) Wir berechnen zunächst, wie viel von dem soeben berechneten Bremsweg *fehlt:*

$$s = 83{,}33\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{m} = 23{,}33\,\mathrm{m}\,.$$

Dies ist der Bremsweg von der gesuchten Geschwindigkeit v_1 bis zum Stillstand, also

$$23{,}33\,\mathrm{m} = \frac{v_1^2}{2 \cdot 4{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \iff v_1 = \sqrt{23{,}33 \cdot 2 \cdot 4{,}63}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 14{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 52{,}92\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$