Übungen (M11)

1) Eine kleine Kugel wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$ senkrecht nach oben abgeschossen.
   a) Wie lange steigt sie?
   b) Welche Höhe erreicht sie?
   c) Wann und mit welcher Geschwindigkeit schlägt sie wieder auf dem Boden auf?
2) a) Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muss ein Körper vertikal in die Höhe geworfen werden, damit er 25 m erreicht?
   b) Wie groß ist die Geschwindigkeit in halber Steighöhe?
3) In welcher Höhe über dem Erdboden hat sich die Anfangsgeschwindigkeit eines mit $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vertikal nach oben geworfenen Steins auf ein Drittel vermindert?
4) Wie hoch kann man Wasser spritzen, das mit $15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Düse verlässt? Zeichnen Sie das v-t-Diagramm und bestätigen Sie an ihm das Ergebnis! Wie hoch ist ein Wasserteilchen 2 s nach dem Abspritzen und welche Geschwindigkeit hat es?
5) Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Vergleichen Sie die Wurfhöhen auf Erde und Mond.
6) Ein Stein wird mit $v_0 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach unten geworfen.
   a) Wann und wo hat er die Geschwindigkeit $15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?
   b) Wann und mit welcher Geschwindigkeit trifft er 25 m tiefer auf?
7) Ein Stein fällt aus der Höhe $h = 40\,\mathrm{m}$ senkrecht zur Erde. Gleichzeitig wird von unten ein zweiter Stein mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht hoch geworfen.
   a) Nach welcher Zeit und in welcher Höhe fliegen die beiden Steine aneinander vorbei?
   b) In welchem zeitlichen Abstand treffen die beiden Steine auf dem Boden auf?
   c) Welche Anfangsgeschwindigkeit müsste der zweite Stein haben, wenn beide zur gleichen Zeit auf dem Boden auftreffen sollen?

Übungen (M11) — Lösungen

1) Die Anfangsgeschwindigkeit wird durch die entgegengesetzt wirkende Fallbeschleunigung ständig verringert, so dass für den senkrechten Wurf gilt:

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v_y(t) = v_0 - gt\,,$

Weg-Zeit-Gesetz: $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,.$

Hierbei gibt $y(t)$ die Höhe über der Abschussstelle und v_y die Geschwindigkeit senkrecht nach oben an.
a) Der höchste Punkt ist erreicht, wenn die Kugel aus der Steig- in die Fallbewegung übergeht und dabei die Geschwindigkeit 0 annimmt.

Höchster Punkt erreicht, wenn: $0 = v_0 - gt\,.$

Dies ergibt die Gleichung $0 = v_0 - gt$ mit der Lösung $t = v_0/g$:

Steigdauer: $t = \frac{v_0}{g}$

Dies ergibt gerade 4,08 s Steigzeit.
b) Die Steighöhe ermittelt man, indem man die gefundene Steigzeit in das Weg-Zeit-Gesetz einsetzt. Man erhält:

Steighöhe: $h = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g (\frac{v_0}{g})^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}\,.$

In diesem Falle ergibt sich eine Steighöhe von 81,55 m.
c) Die Kugel kommt wieder unten an, wenn $y(t)$ wieder 0 ist:

Aufschlag, wenn: $0 = y(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = t \cdot (v_0 - \frac{1}{2}\, g\, t)$

Diese quadratische Gleichung hat als erste Lösung $t = 0$, d. h. den Startpunkt. Der gesuchte Aufschlagszeitpunkt ist die zweite Lösung dieser Gleichung, also die Nullstelle des zweiten Faktors $0 = v_0 - \frac{1}{2} gt$. Dies ergibt die

Wurfdauer: $t = \frac{2 \cdot v_0}{g}$

Die erreichte Geschwindigkeit erhält man, indem man die Wurfzeit in das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz einsetzt. Dies ergibt die

Endgeschwindigkeit: $v = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0\,.$

Die Geschwindigkeit der Kugel ist beim Aufschlag genauso groß wie beim Abschuss, jedoch in umgekehrter Richtung (daher das Minuszeichen).

2) a) Die gesuchte Abwurfgeschwindigkeit senkrecht nach oben ist gleich der Geschwindigkeit nach 25 m freiem Fall (beim senkrechten Wurf ist Abwurfgeschwindigkeit und Aufprallgeschwindigkeit identisch, siehe vorangehende Aufgabe). Also:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \iff t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \implies v = g \cdot t = g \cdot \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{g^2 \cdot \frac{2s}{g}} = \sqrt{2sg}\,.$$

Konkret ergibt dies

$$v = \sqrt{2 \cdot 25\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 22{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}\,.}$$

b) Die Geschwindigkeit bei halber Steighöhe ist gleich der Geschwindigkeit nach freiem Fall von der vollen Steighöhe bis zur halben, also bei freiem Fall aus 12,5 m Höhe. Dies ergibt

$$v = \sqrt{2 \cdot 12{,}5\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 15{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}\,.}$$

Alternative Lösung durch *Energieüberlegungen:*
a) Beim Start hat der Körper nur kinetische Energie $W_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$ mit der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit v_0. Im höchsten Punkt ist die kinetische Energie 0, der Körper hat nur die potentielle Energie $W_2 = mgh$ mit der vorgeschriebenen Höhe $h = 25\,\mathrm{m}$. Also nach dem Prinzip der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \iff v_0^2 = 2gh \iff v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 25\,\mathrm{m}} = 22{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Aus der Formel $v_0 = \sqrt{2gh}$ folgt, dass v_0 proportional ist zu $\sqrt{h}$, also wird bei halber Höhe die Anfangsgeschwindigkeit mit dem Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multipliziert, also ist für b) die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 22{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 15{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

3) A) Der senkrechte Wurf ist nichts anderes als eine konstant beschleunigte geradlinige Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit. Wir bestimmen aus deren Gesetzmäßigkeiten zunächst die Zeit, in der die Geschwindigkeit auf ein Drittel sinkt:

$$v = v_0 - gt = \frac{v_0}{3} \iff gt = \frac{2}{3}v_0 \iff t = \frac{2v_0}{3g} = \frac{2 \cdot 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}04\,\mathrm{s}$$

Die Höhe s, bis zu der der Körper in dieser Zeit steigt, ist dann

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}04\,\mathrm{s} - \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} \cdot (2{,}04\,\mathrm{s})^2 = 40{,}77\,\mathrm{m}\,.$$

B) Alternativ kann man Energieüberlegungen anstellen. Wir vergleichen die Energien im Startzeitpunkt (nur kinetische Energie $W_1 = mv_1^2/2$, $v_1 = 30\,\mathrm{m/s}$) und in der gesuchten Höhe h (kinetische Energie $W_2 = mv_2^2/2$ mit $v_2 = 10\,\mathrm{m/s}$ plus potentielle Energie $W = mgh$). Nach dem Prinzip der Energieerhaltung also

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mgh \iff h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{900 - 100}{2 \cdot 9{,}81}\,\mathrm{m} = 40{,}77\,\mathrm{m}\,.$$

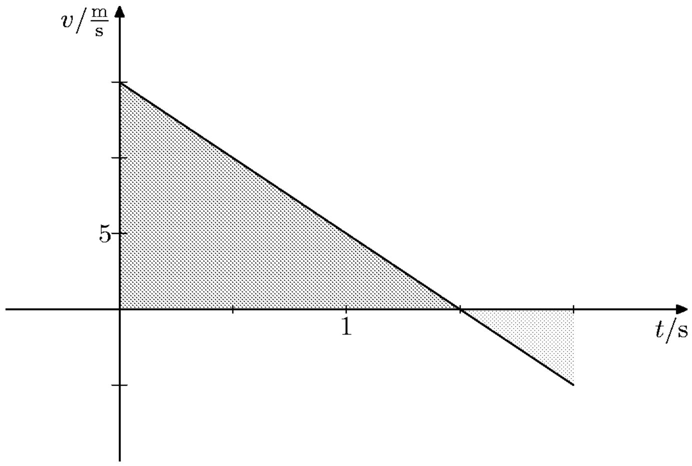
4) Bei $v_0 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ Startgeschwindigkeit erhalten wir (siehe 2.)

$$s = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11{,}47\,\text{m}\,.$$

Alternativ mit Energieüberlegungen: Beim Start hat ein Wassertropfen nur kinetische Energie $W_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Im höchsten Punkt (Höhe h) hat er nur potentielle Energie $W_2 = mgh$. Nach dem Prinzip der Energieerhaltung gilt also

$$W_1 = W_2 \iff \frac{1}{2}v_0^2 = gh \iff h = \frac{v_0^2}{2h}\,,$$

und man erhält dasselbe Ergebnis wie oben.



Der Skizze entnimmt man die zurückgelegte Strecke als Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve und und der t-Achse bis zum Umkehrzeitpunkt $t = \frac{v_0}{g} = 1{,}53\,\text{s}$. Die Strecke beträgt damit $s = \frac{1}{2} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}53\,\text{s} = 11{,}47\,\text{m}$.
Der Schnittpunkt mit der t-Achse markiert den Umkehrpunkt ($v = 0$). Verlängert man die Geschwindigkeitskurve über den Umkehrzeitpunkt $t = 1{,}53\,\text{s}$ hinaus, erhält man eine ins Negative gehende Geschwindigkeit und eine ebenfalls negativ zu wertende Wegstrecke (die Fallstrecke während etwa $(2-1{,}53)\,\text{s} = 0{,}47\,\text{s}$). Sie beträgt $s = \frac{1}{2} \cdot gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0{,}47\,\text{s})^2 = 1{,}09\,\text{m}$. Damit befindet sich ein Wasserteilchen 2 s nach dem Abspritzen in $11{,}47\,\text{m} - 1{,}09\,\text{m} = 10{,}38\,\text{m}$ Höhe.

5) Die Steighöhe in Abhängigkeit von der Abschussgeschwindigkeit ist gegeben durch (siehe 2. bzw. Energiebetrachtungen) $s = \frac{v_0^2}{2g}$. Sie ist also umgekehrt proportional zur Fallbeschleunigung g. Auf dem Mond beträgt diese etwa $\frac{1}{6}$, so dass die Steighöhe auf dem Mond das 6-fache beträgt.

6) Da Anfangsgeschwindigkeit und Beschleunigung dieselbe Richtung haben, lauten die Bewegungsgesetze (bei Orientierung der s-Koordinate nach *unten)*

$$v = v_0 + gt\,, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\,.$$

a) Sei t der gesuchte Zeitpunkt, also

$$15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = v = v_0 + gt \iff t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1{,}12\,\text{s}\,.$$

Die Position des Steins kann man nun entweder mit Hilfe des Weg-Zeit-Gesetzes aus der jetzt bekannten Zeit bestimmen; man kann aber auch Energieüberlegungen benutzen. Bezogen auf den Startpunkt als Nullniveau der Lagenergie erhält man die Energiebilanz:

$$W_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = W_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \iff h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{225 - 16}{2 \cdot 9{,}81}\,\mathrm{m} = 10{,}65\,\mathrm{m}\,.$$

Der Stein erreicht die Geschwindigkeit $v = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ also $h = 10{,}65\,\mathrm{m}$ unter der Abwurfstelle.
b) In $h_2 = 25\,\mathrm{m}$ Tiefe hat der Stein eine Geschwindigkeit v_2, für die aufgrund der Energiebilanz gilt (siehe obige Formel)

$$v_2^2 - v_0^2 = 2gh_2 \iff v_2^2 = v_0^2 + 2gh_2 \iff v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_2}\,.$$

Dies ergibt

$$v_2 = \sqrt{16\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 25\,\mathrm{m}} = 22{,}51\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Die Zeit t_2 des Falls durch diese 25 m ergibt sich dann aufgrund der Proportionalität $\Delta v = g\Delta t$ von Geschwindigkeitsänderung und Zeit:

$$\frac{v_2 - v_0}{t_2} = g \iff t_2 = \frac{v_2 - v_0}{g} = \frac{(22{,}51 - 4)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}89\,\mathrm{s}\,.$$

7) a) Weg-Zeit-Gesetz des fallenden Steins:

$$s_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Weg-Zeit-Gesetz des steigenden Steins:

$$s_2(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Treffzeit t:

$$s_1(t) = s_2(t) \iff h = v_0 t \iff t = \frac{h}{v_0} = \frac{40\,\mathrm{m}}{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

Beachten Sie, dass die Treffzeit $t = \frac{h}{v_0}$ *unabhängig* von der Fallbeschleunigung ist. Sie ist also auf anderen Himmelskörpern genauso groß, ja sogar bei fehlender Gravitation ergibt sich derselbe Wert: Das Ergebnis $t = \frac{h}{v_0}$ gibt genau die Zeit an, die Stein 2 (bei fehlender Gravitation) braucht, um die Strecke h mit der Geschwindigkeit v_0 zu durchlaufen und so den Stein 1 zu erreichen.
Die Höhe des Treffpunktes ist

$$s_1(2\,\mathrm{s}) = 40\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\,\mathrm{s}^2 = 20{,}38\,\mathrm{m}\,.$$

Im Gegensatz zur Treffzeit ist der Treffpunkt durchaus von der Fallbeschleunigung abhängig!

b) Aufschlagzeit t_1 für den ersten Stein ist die Fallzeit für die Fallstrecke h:

$$s_1(t_1) = 0 \iff h = \frac{1}{2} g t_1^2 \iff t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{80\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2{,}86\,\mathrm{s}$$

Aufschlagzeit t_2 für den zweiten Stein:

$$s_2(t_2) = 0 \iff v_0 t_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \iff t_2 = 0 \ \vee \ v_0 = \frac{1}{2} g t_2\,.$$

$t_2 = 0$ ist der Abschusszeitpunkt, die gesuchte Aufschlagzeit ist daher also

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} = \frac{40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 4{,}08\,\mathrm{s}\,.$$

Der gesuchte zeitliche Abstand ist demzufolge

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1{,}22\,\mathrm{s}\,.$$

c) Nach den obigen Ergebnissen gilt

$$t_2 = t_1 \iff \frac{2v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \iff v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \sqrt{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 14{,}01\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$