Übungen (M12)

1) Ein unerfahrener Pilot lässt einen schweren Versorgungssack genau senkrecht über dem Zielpunkt aus der in 500 m Höhe horizontal fliegenden Maschine fallen. Der Sack schlägt genau 1 km vom Ziel entfernt auf. Welche Geschwindigkeit hatte das Flugzeug, welche hatte der Sack am Boden?
2) Ein Wasserstrahl steigt 80 cm hoch. Mit welcher Geschwindigkeit verlässt er die Düse senkrecht nach oben? Man spritzt ihn nun gleich schnell waagerecht ab; 1,25 m tiefer trifft er den Boden. Wie weit kommt er in waagerechter Richtung? Unter welchem Winkel trifft er am Boden auf?
3) 1,5 m über dem Boden wird eine Kugel waagerecht abgeschleudert und fliegt in horizontaler Richtung gemessen 4 m weit.
   a) Wie lange war sie unterwegs?
   b) Mit welcher Geschwindigkeit wurde sie abgeschossen?
   c) Unter welchem Winkel gegen die Horizontale trifft sie am Boden auf?
4) Ein Pilot fliegt mit seinem Flugzeug in 500 m Höhe mit der Geschwindigkeit 360 km/h.
   a) In welcher horizontalen Entfernung vor dem Ziel muss er einen Versorgungssack abwerfen, damit er am Zielpunkt aufschlägt?
   b) Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel zur Erdoberfläche schlägt er am Ziel auf?
5) Eine Kugel wird mit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ waagerecht abgeschleudert. In welcher Höhe unter dem Abwurfpunkt trifft sie eine 10 m entfernte Wand? Mit welcher Geschwindigkeit trifft sie dort auf?
6) Die kleine Metallkugel wird nun unter einem Winkel von 60^0 mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s nach oben abgeworfen.
   a) Bestimmen Sie Wurfweite und Wurfhöhe.
   b) Wo befindet sich die Kugel 2 s nach dem Abwurf?
   c) Bestimmen Sie Betrag und Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu diesem Zeitpunkt.
7) Ein Sportler stößt eine Kugel aus der Höhe $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$ unter dem Winkel $\alpha = 30^0$ zur Horizontalen und erreicht die Weite von 19,3 m. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 hat er die Kugel gestoßen?

Übungen (M12) — Lösungen

1) Der Sack ist so lange in der Luft, wie der freie Fall aus $h = 500\,\mathrm{m}$ Höhe dauert, also

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \iff t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{1000\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 10{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

In dieser Zeit t hat sich der Sack $x = 1000\,\mathrm{m}$ in horizontaler Richtung bewegt, also betrug seine horizontale Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{10{,}1\,\mathrm{s}} = 99{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Diese stimmt mit der Geschwindigkeit des horizontal fliegenden Flugzeugs im Moment des Abwurfes überein:

$$v_{\text{Flugzeug}} = 99{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 356{,}56\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

Die Geschwindigkeit im Moment des Aufschlags bestimmen wir vektoriell aus den Geschwindigkeitskomponenten in diesem Moment (siehe Skizze in nachfolgender Aufgabe). Die horizontale Geschwindigkeit ist unveränderlich $v_x = 99{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, während die vertikale Geschwindigkeit die Fallgeschwindigkeit $v_y = gt$ zum Zeitpunkt $t = 10{,}1\,\mathrm{s}$ des Aufschlags ist, also $v_y = 99{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Damit erhalten wir nach dem Satz des Pythagoras die Aufprallgeschwindigkeit

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 140{,}07\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 504{,}26\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

2) Die Abschussgeschwindigkeit ist gleich der Fallgeschwindigkeit nach $h_1 = 80\,\mathrm{cm}$ freiem Fall, also (s. o.)

$$v_0 = \sqrt{2h_1 g} = \sqrt{1{,}6 \cdot 9{,}81}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Für einen freien Fall aus $h_2 = 1{,}25\,\mathrm{m}$ Höhe beträgt die Fallzeit

$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Solange ist also ein waagerecht abgespritzter Wassertropfen in der Luft. In dieser Zeit bewegt er sich in horizontaler Richtung

$$x = v_0 \cdot t = \sqrt{2h_1 g} \cdot \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{4h_1 h_2} = \sqrt{4 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}25}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}\,.$$

Der Aufschlagwinkel α mit der Horizontalen ergibt sich aus den Geschwindigkeitskomponenten im Moment $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ des Aufschlags:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g \cdot t}{v_0} = \frac{4{,}95}{3{,}96} = 1{,}25 \iff \alpha = \arctan 1{,}25 = 51{,}34^0\,.$$

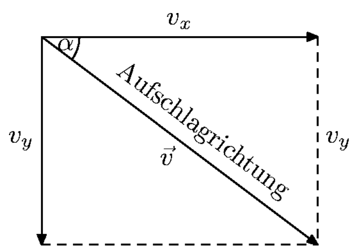
3) a) Die Kugel ist so lange in der Luft, wie der freie Fall aus $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ Höhe dauert:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \iff t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{3\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \approx 0{,}55\,\mathrm{s}\,.$$

b) Während dieser Zeit t ist sie in horizontaler Richtung $x = 4\,\mathrm{m}$ weit geflogen, also betrug die *horizontale* Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{x}{t} \approx 7{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Da die Kugel waagerecht abgeschossen wurde, ist dies zugleich die Abschussgeschwindigkeit.



Die Aufschlagrichtung ist die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ im Moment des Aufschlags. Diese erhalten wir vektoriell aus den horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten in diesem Moment. Während die horizontale Komponente unverändert $v_x = 7{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist, wächst die vertikale Komponente (=Fallgeschwindigkeit) $v_y = gt$ proportional mit der Zeit, für den Aufschlagzeitpunkt $t \approx 0{,}553\,\mathrm{s}$ ergibt sich $v_y \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}553\,\mathrm{s} \approx 5{,}42\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Für den Winkel α (siehe Skizze) gilt damit:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \approx \frac{5{,}42}{7{,}23} \approx 0{,}75\,,\ \text{also}\ \alpha \approx 36{,}87^0\,.$$

4) a) Der Versorgungssack hat beim Abwurf aus der Maschine eine *horizontale* Geschwindigkeit $v_0 = 360\,\mathrm{km/h}$ (=Geschwindigkeit des Flugzeugs). Während seines Falles legt er daher in horizontaler Richtung eine Strecke von

$$x = v_0 \cdot t = 360\,\mathrm{km/h} \cdot t$$

zurück, wenn t die Dauer des Falles ist.
Wie lange braucht der Versorgungssack, um die 500 m zu durchfallen? Nach dem Fallgesetz gilt

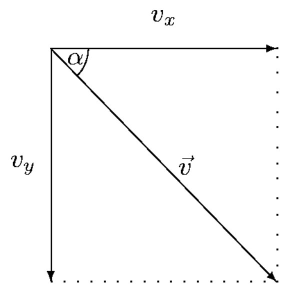
$$500\,\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\,,$$

also $t = \sqrt{1000/9{,}81}\,\mathrm{s} = 10{,}1\,\mathrm{s}$. Während dieser Zeit legt er in horizontaler Richtung

$$360\,\mathrm{km/h} \cdot 10{,}1\,\mathrm{s} = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10{,}1\,\mathrm{s} = 1010\,\mathrm{m}$$

zurück. Der Pilot muss den Sack 1010 m vor dem Ziel abwerfen.
b) Um Betrag und Richtung der Geschwindigkeit beim Aufschlag zu bestimmen, überlegt man sich zunächst, welche horizontale und welche vertikale Geschwindigkeit der Sack im Moment des Aufpralls (also $t = 10{,}1\,\mathrm{s}$ nach dem Abwurf) hat.
Nun ist die horizontale Geschwindigkeit konstant $v_x = 360\,\mathrm{km/h} = 100\,\mathrm{m/s}$. Nach 10,1 s Fall beträgt die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung (die Fallgeschwindigkeit) $v_y(t) = g \cdot t$,

$$v_y(10{,}1\,\mathrm{s}) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10{,}1\,\mathrm{s} = 99{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$



Wir müssen nun aus der bekannten horizontalen und vertikalen Geschwindigkeit die gesuchte resultierende Geschwindigkeit vektoriell zusammensetzen. Wir erhalten den Betrag der resultierenden Momentangeschwindigkeit v mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$v = \sqrt{100^2 + 99{,}05^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 140{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Die Richtung erhalten wir mit Hilfe der Tangensfunktion. Für den Winkel α gilt

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \iff \alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{99{,}05}{100} = 44{,}73^0\,.$$

5) Wir bestimmen zunächst die Zeit, nach der die Kugel auf die $x = 10\,\mathrm{m}$ entfernte Wand auftrifft. Da die Bewegung in horizontaler Richtung gleichförmig ist mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, gilt

$$x = v_0 \cdot t \iff t = \frac{x}{v_0} = \frac{10\,\mathrm{m}}{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

In dieser Zeit t bewegt sich die Kugel in vertikaler Richtung gemäß den Gesetzen des freien Falls, also durchfällt sie in dieser Zeit die Höhe

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(0{,}5\,\mathrm{s})^2 = 1{,}23\,\mathrm{m}\,.$$

Die Kugel befindet sich beim Aufprall auf die Wand also $1{,}23\,\mathrm{m}$ unter der Abwurfstelle. Der momentane Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ im Moment des Aufschlags (siehe Skizze in Aufgabe 2.) hat die horizontale Komponente $v_x = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die vertikale Komponente $v_y = g\cdot t = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}5\,\mathrm{s} = 4{,}91\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Aus diesen ergibt sich wie oben die Momentangeschwindigkeit

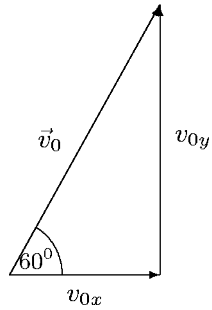
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 20{,}59\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

6) Eine Wurfbewegung setzt sich aus einer Horizontal- und einer Vertikalbewegung zusammen. Die Horizontalbewegung wird nicht von der Fallbewegung beeinflusst, ist also eine unbeschleunigte, d. h. gleichförmige Bewegung. Ihre Geschwindigkeit ist v_{0x}. Die Vertikalbewegung ist eine konstant beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_{0y}. Damit lauten die Weg-Zeit-Gesetze des Wurfes:

$$x(t) = v_{0x}\cdot t\,,\quad y(t) = v_{0y}\cdot t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

und die Geschwindigkeits-Zeit-Gesetze

$$v_x(t) = v_{0x}\ \text{konstant}\,,\quad v_y(t) = v_{0y} - g\cdot t\,.$$



Wir bestimmen zunächst aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0}$ die benötigten Komponenten v_{0x} und v_{0y}. Nach Definition von Sinus und Cosinus erhalten wir $\cos(60^0) = v_{0x}/v_0$ und $\sin(60^0) = v_{0y}/v_0$, also

$$v_{0x} = v_0\cdot\cos(60^0) \quad\text{und}\quad v_{0y} = v_0\cdot\sin(60^0)\,.$$

Mit dem gegebenen Wert für v_0 ergibt sich $v_{0x} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_{0y} = 17{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
a) Um die Wurfhöhe zu bestimmen, muss man feststellen, wann der höchste Punkt erreicht ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Kugel aus der Steigbewegung (positive vertikale Geschwindigkeit $v_y(t)$) in die Fallbewegung (negative vertikale Geschwindigkeit $v_y(t)$) übergeht, wenn also gerade gilt $v_y(t) = 0$. Somit:

<u>Höchster Punkt erreicht, wenn:</u> $$0 = v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$$

Dies ergibt die Gleichung $0 = v_{0y} - gt$ mit der Lösung $t = v_{0y}/g$:

<u>Steigdauer:</u> $$t = \frac{v_{0y}}{g}$$

Mit den obigen Werten beträgt also die Steigdauer $t = \frac{17{,}32}{9{,}81}\,\text{s} = 1{,}77\,\text{s}$.
Die Wurfhöhe ist nun die während der Steigzeit $t = \frac{v_{0y}}{g}$ in y-Richtung zurückgelegte Strecke:

$$y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{v_{0y}^2}{2g}\,.$$

<u>Wurfhöhe:</u> $$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

In diesem Fall ergibt sich konkret als Wurfhöhe

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 15{,}29\,\text{m}\,.$$

Um die Wurfweite zu bestimmen, muss man feststellen, wann die Kugel wieder auf dem Boden aufschlägt, d. h. wann die Höhe $y(t)$ über dem Boden wieder 0 ist:

<u>Aufschlag, wenn:</u> $$0 = y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = t \cdot (v_{0y} - \frac{1}{2}\,g\,t)$$

Diese quadratische Gleichung hat als erste Lösung $t = 0$, d. h. den Startpunkt. Der gesuchte Aufschlagszeitpunkt ist die zweite Lösung dieser Gleichung, also die Nullstelle des zweiten Faktors. Dies ergibt $v_{0y} = gt/2$:

<u>Wurfdauer:</u> $$t = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g}$$

Wir erkennen, dass (bei ebenem Gelände) die Wurfdauer doppelt so groß ist wie die Steigdauer.
In unserer Aufgabe ergibt sich so eine Wurfdauer von 3,53 s.
Die Wurfweite ist die während der Wurfbewegung in *horizontaler* Richtung zurückgelegte Strecke. Sie beträgt bei konstanter Geschwindigkeit v_{0x} und Wurfdauer $t = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g}$

<u>Wurfweite:</u> $$w = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Konkret ergibt sich hier als Wurfweite

$$w = \frac{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 17{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 35{,}31\,\mathrm{m}\,.$$

b) Wir berechnen die x- und y-Koordinaten für $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$x(2\,\mathrm{s}) = v_{0x} \cdot 2\,\mathrm{s} = 10 \cdot 2\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$$

$$y(2\,\mathrm{s}) = v_{0y} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{g}{2} \cdot 4\,\mathrm{s}^2 = 17{,}32 \cdot 2\,\mathrm{m} - 19{,}62\,\mathrm{m} = 15{,}02\,\mathrm{m}$$

Die Kugel befindet sich $2\,\mathrm{s}$ nach dem Abwurf $15{,}02\,\mathrm{m}$ über dem Boden und $20\,\mathrm{m}$ in horizontaler Richtung von der Abschussstelle entfernt.

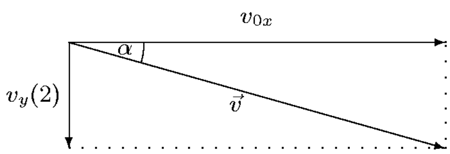
c) Wir berechnen zunächst die momentane Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2\,\mathrm{s}$: Die Horizontalgeschwindigkeit ändert sich nicht, beträgt also stets $v_{0x} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Für die Vertikalgeschwindigkeit erhalten wir

$$v_y(2) = v_{0y} - g \cdot 2\,\mathrm{s} = 17{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 19{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -2{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Der sich ergebende Wert für v_y ist negativ; das bedeutet, die Kugel hat den höchsten Punkt überschritten und befindet sich in der Abwärtsbewegung.

Wie in 2) b) müssen wir nun aus der horizontalen und vertikalen Momentangeschwindigkeit die gesuchte resultierende Geschwindigkeit v zum Zeitpunkt $t = 2\,\mathrm{s}$ vektoriell zusammensetzen. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich der Betrag von v (in m/s)



$$\sqrt{10^2 + 2{,}3^2} \approx \sqrt{105{,}29} \approx 10{,}26\,.$$

Für die Richtung ergibt sich

$$\tan\alpha = -\frac{2{,}3}{10} = -0{,}23\,,$$

also ein Winkel von $-12{,}95^0$. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass in dem betrachteten Moment die Kugel mit $12{,}95^0$ *nach unten geneigt* fliegt.

7) Das Weg-Zeit-Gesetz der Kugel ist gegeben durch

$$x(t) = v_{0x}t = v_0\cos\alpha \cdot t\,, \quad y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = h + v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Es sei t der Aufschlagzeitpunkt und $w = 19{,}3\,\mathrm{m}$ die Stoßweite, dann gilt

$$w = x(t) = v_0\cos\alpha \cdot t \quad \text{und} \quad 0 = y(t) = h + v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Dies ergibt

$$t = \frac{w}{v_0\cos\alpha} \quad \text{und} \quad 0 = h + v_0\sin\alpha \cdot \frac{w}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{w^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = h + w\tan\alpha - \frac{gw^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,.$$

Wir lösen die letzte Gleichung nach v_0 auf

$$v_0^2 = \frac{gw^2}{2\cos^2\alpha \cdot (h + w\tan\alpha)} = \frac{gw^2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha(h\cos\alpha + w\sin\alpha)}$$

und erhalten mit $\sin\alpha = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und $\cos\alpha = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (19{,}3\,\mathrm{m})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{4}(1{,}8\,\mathrm{m} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 19{,}3\,\mathrm{m} \cdot \frac{1}{2})}} = 13{,}72\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$