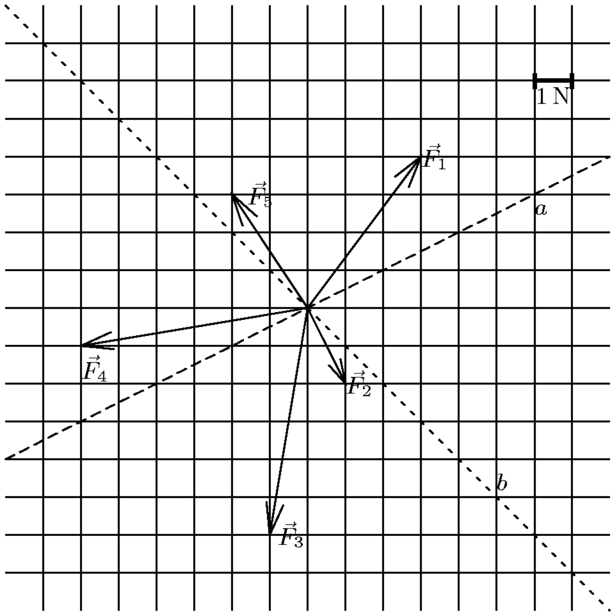
Übungen (M13)

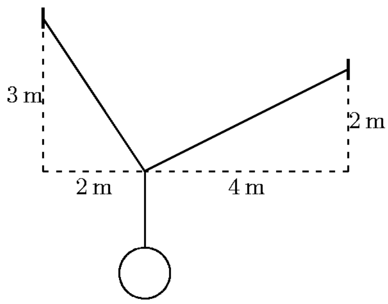
1) **Vektoraddition**
Gegeben sind fünf Kraftvektoren in nachstehender Skizze.



a) Bestimmen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}$.
b) Zerlegen Sie die resultierende Kraft in zwei Komponenten $\vec{F}_a$ und $\vec{F}_b$ in Richtung der eingezeichneten Wirkungslinien a, b.

2) Eine unbekannte Masse hängt an zwei Seilen. Eines der Seile bildet mit der Vertikalen einen Winkel von 30^0 und wird mit 4 kN belastet.
a) Bestimmen Sie die Masse sowie die Belastung des anderen Seiles, wenn beide Seile miteinander einen Winkel von 55^0 bilden.
b) Welchen Winkel bilden die beiden Seile miteinander, wenn die Belastung des zweiten Seils 3 kN beträgt? Wie groß ist die Masse in diesem Falle?

3) Über einer Straße hängt eine Straßenlaterne an zwei Seilen wie in der Skizze dargestellt. Die Belastung des linken Seils beträgt 450 N. Welche Masse hat die Lampe und welche Belastung erfährt das rechte Seil?



Übungen (M13) — Lösungen

1) a) In den angegebenen Einheiten haben die Kraftvektoren die Koordinaten

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{F}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die resultierende Kraft

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit dem Betrag $F = |\vec{F}| = \sqrt{25+4}\,\mathrm{N} \approx 5{,}39\,\mathrm{N}$. Der Richtungswinkel von $\vec{F}$ mit der positiven x-Achse ist

$$\arctan(\frac{2}{5}) - 180^0 = -158{,}2^0 .$$

b) Richtungsvektoren der Wirklinien sind

$$\vec{u}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen nun $\vec{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{u}_a, \vec{u}_b$ darstellen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left[\begin{array}{cccccc} & -5 & = & 2r & + & s \\ \wedge & -2 & = & r & - & s \end{array} \right]$$
$$\iff \left[\begin{array}{cccccc} & -7 & = & 3r & & \\ \wedge & -2 & = & r & - & s \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{cccccc} & -\frac{7}{3} & = & r & & \\ \wedge & s & = & 2 & - & \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$
$$\iff r = -\frac{7}{3} \ \wedge \ s = -\frac{1}{3}$$

Damit gilt

$$\vec{F} = -\frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Komponenten sowie ihre Beträge sind

$$\vec{R}_a = -\frac{7}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_a = \frac{7}{3}\sqrt{5}\,\mathrm{N} \approx 5{,}22\,\mathrm{N}.$$
$$\vec{R}_b = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_b = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{N} \approx 0{,}47\,\mathrm{N},$$

2) a) Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ der angehängten Masse zerlegt sich in zwei Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Richtung der beiden Seile. Es seien α_1, α_2 die Winkel der Seile mit der Vertikalen, also $\alpha_1 = 30^0$ und $\alpha_2 = 55^0 - 30^0 = 25^0$. Da die Gewichtskraft

keine Horizontalkomponente hat, müssen die Horizontalkomponenten der beiden Seilkräfte entgegengesetzt gleich sein. Für die Beträge $F_{1,h}$, $F_{2,h}$ gilt daher

$$F_{1,h} = F_{2,h} \iff F_1 \cdot \sin\alpha_1 = F_2 \cdot \sin\alpha_2 \iff F_2 = F_1 \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \approx 4{,}73\,\mathrm{kN}\,.$$

Das Gewicht der unbekannten Masse ist gleich der Summe der Vertikalkomponenten

$$mg = F_\mathrm{G} = F_{1,v} + F_{2,v} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 + F_2 \cdot \cos\alpha_2$$

und für die gesuchte Masse ergibt sich so

$$m = \frac{4\,\mathrm{kN} \cdot \cos 30^0 + 4{,}73\,\mathrm{kN} \cdot \cos 25^0}{9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 790{,}33\,\mathrm{kg}\,.$$

b) Wieder müssen die Horizontalkomponenten übereinstimmen:

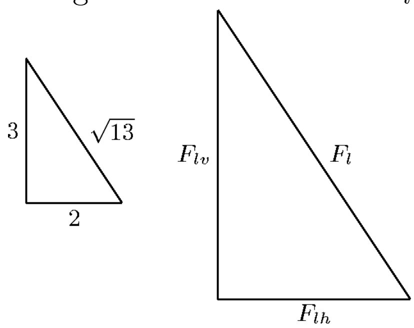
$$F_1 \cdot \sin\alpha_1 = F_2 \cdot \sin\alpha_2 \iff \sin\alpha_2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot \sin\alpha_1 = \frac{4}{3} \cdot \sin(30^0) = \frac{2}{3}$$

$$\iff \alpha_2 = \arcsin(\frac{2}{3}) \approx 41{,}81^0\,.$$

Die angehängte Masse berechnet man wieder wie oben

$$m = \frac{F_1 \cdot \cos\alpha_1 + F_2 \cdot \cos\alpha_2}{g} = 581{,}06\,\mathrm{kg}\,.$$

3) Wir bezeichnen die Belastungskräfte der Seile mit $\vec{F_l}$ (links) und $\vec{F_r}$ (rechts). Die



Kräfte haben die Richtungen der Seile. Das bedeutet für die Kraft F_l und ihre Horizontal- bzw. Vertikalkomponente F_{lh} bzw. F_{lv}, dass die beiden skizzierten Dreiecke ähnlich und daher die Seitenverhältnisse gleich sind:

$$F_{lh} : F_{lv} : F_l = 2 : 3 : \sqrt{13}\,.$$

Entsprechend gilt

$$F_{rh} : F_{rv} : F_r = 4 : 2 : \sqrt{20}\,.$$

Da die Gewichtskraft der Lampe vertikal wirkt, also keine Horizontalkomponente hat, müssen die Horizontalkomponenten der beiden Belastungskräfte der Seile (entgegengesetzt) gleich sein, also gilt für die Beträge

$$F_{lh} = F_{rh} \iff \frac{F_l}{\sqrt{13}} \cdot 2 = \frac{F_r}{\sqrt{20}} \cdot 4 \iff F_r = F_l \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = 450\,\mathrm{N} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \approx 279{,}1\,\mathrm{N}$$

Die Summe der Vertikalkomponenten dieser Kräfte ist das Gewicht der Lampe. Als Masse erhält man dann:

$$mg = F_\mathrm{G} = \frac{F_l}{\sqrt{13}} \cdot 3 + \frac{F_r}{\sqrt{20}} \cdot 2 = 450\,\mathrm{N} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 279{,}08\,\mathrm{N} \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} \iff m = 50{,}89\,\mathrm{kg}\,.$$