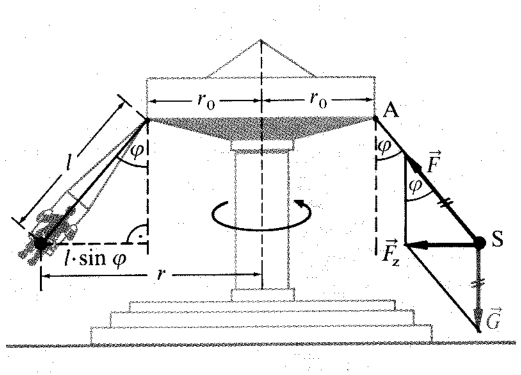
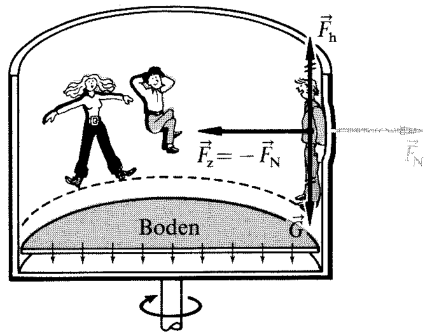
Übungen (M15)

1) Ein Mensch ($m = 75\,\text{kg}$) befindet sich am Äquator. Wie groß ist die Zentripetalkraft F_z, die auf ihn wirkt? Wodurch wird diese Zentripetalkraft erzeugt? Wird F_z zu den Polen hin größer oder kleiner? Warum? Wie groß ist F_z bei uns (50^0 geographischer Breite)? [Erdradius $r = 6378\,\text{km}$.]

2) Bei einem Kettenkarussell (siehe Bild links) ist $r_0 = 6\,\text{m}$ und $l = 5\,\text{m}$. Das Karussell dreht sich gleichförmig und der Winkel φ beträgt 55^0.
   a) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit v?
   b) Wie groß sind Umlaufdauer T und Drehfrequenz f?
   c) Welche Kraft greift im Aufhängepunkt der Kette an (Fahrer mit Sitz 85 kg)?





3) Von welcher Drehfrequenz f an bleibt eine Person (15 kg) an der Wand des Rotors (siehe Bild rechts) hängen, wenn dieser 4,2 m Durchmesser hat und die Haftreibungszahl $f_h = 0{,}5$ beträgt? (Der Schwerpunkt der Person habe von der Wand 10 cm Abstand.)

4) Ein Stein (200 g) wird immer schneller an einer 50 cm langen Schnur in einem horizontalen Kreis herumgeschleudert. Bei welcher Drehfrequenz reißt sie, wenn sie 100 N aushält?

5) a) Von welcher Drehfrequenz f an könnte die Achse des Rotors (siehe Bild oben rechts) horizontal gelegt werden, ohne dass die Personen im höchsten Punkt herabfallen, wenn der Rotordurchmesser 5,2 m beträgt?
   b) Welche Kraft übt bei dieser Drehfrequenz der Rotor im tiefsten Punkt auf eine Person (15 kg) nach oben aus?

Übungen (M15) — Lösungen

1) Es gilt

$$F_z = ma_z = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2} = 75\,\mathrm{kg} \cdot 6378 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 3600)^2\,\mathrm{s}^2} = 2{,}53\,\mathrm{N}\,.$$

Diese Zentripetalkraft wird von der Gewichtskraft aufgebracht. Diese wird dadurch reduziert: Der Mensch belastet am Äquator den Erdboden mit 2,53 N weniger (im fiktiven Vergleich mit einer ruhenden Erde); sein Gewicht wird durch die Drehbewegung geringer.
Vom Äquator zum Pol nimmt der Bahnradius (dies ist der Abstand von der Erdachse, nicht vom Erdmittelpunkt!) und damit die Zentripetalkraft ab. Für 50^0 geographischer Breite beträgt $r = r_E \cdot \cos 50^0 = 4099{,}7\,\mathrm{km}$, entsprechend ist die Zentripetalkraft

$$F_z' = F_z \cdot \cos 50^0 = 2{,}53\,\mathrm{N} \cdot \cos 50^0 = 1{,}63\,\mathrm{N}\,.$$

2) a) Bei dem angegebenen Winkel gilt für die Zentripetalbeschleunigung

$$\frac{F_z}{F_G} = \frac{a_z}{g} = \tan\varphi \iff \frac{v^2}{r} = g\tan\varphi \iff v = \sqrt{rg\tan\varphi}\,.$$

Dabei ist r der Radius der Bahn, also (siehe Skizze)

$$r = r_0 + l\sin\varphi$$

und damit dann

$$v = \sqrt{(r_0 + l\sin\varphi)\cdot g\tan\varphi} = \sqrt{(6 + 5\sin 55^0)\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \tan 55^0} = 11{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

b) Wir berechnen T und f durch

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} \iff T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot(r_0 + l\sin\varphi)}{v} = \frac{2\pi(6 + 5\sin 55^0)\,\mathrm{m}}{11{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 5{,}33\,\mathrm{s}$$

und damit

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}1875\,\mathrm{Hz}\,.$$

c) Die Gesamtbelastung ist die in der Skizze bereits eingezeichnete resultierende Kraft $\vec{F}$, also

$$\cos\varphi = \frac{F_G}{F} \iff F = \frac{F_G}{\cos\varphi} = \frac{mg}{\cos\varphi} = \frac{85\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 55^0} = 1453{,}77\,\mathrm{N}\,.$$

3) Die Kraft, die verhindert, dass der Körper an der Wand herunterrutscht, ist zunächst einmal die Haftreibungskraft F_h. Diese ist proportional zur Normalkraft F_N, die der Körper auf die Unterlage ausübt. Die Normalkraft ist die Gegenkraft zur

Kraft, die der Rotor auf den Körper ausübt und die den Körper auf die Kreisbahn zwingt, die Zentripetalkraft F_z. Also

$$F_h = f_h \cdot F_N = f_h \cdot F_z = f_h m r \omega^2 = f_h m r \cdot 4\pi^2 f^2 \,.$$

Damit der Körper nicht rutscht, muss die maximale Haftreibungskraft mindestens gleich der Gewichtskraft sein:

$$F_G = F_h \iff mg = f_h m r \cdot 4\pi^2 f^2 \iff f^2 = \frac{g}{f_h r \cdot 4\pi^2} \,.$$

Mit dem Bahnradius des Schwerpunktes $r = 2{,}1\,\mathrm{m} - 0{,}1\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$ ergibt sich

$$f = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}5 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot 4\pi^2}} = 0{,}5\,\mathrm{Hz} \,.$$

Die angegebene Masse spielt für die Beantwortung der Frage offenbar keine Rolle. Warum?

4) Die Schnur reißt, wenn die Zentripetalkraft 100 N erreicht hat:

$$100\,\mathrm{N} = F_z = m r \omega^2 = 4\pi^2 m r f^2 \iff f = \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N}}{4\pi^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}} = 5{,}03\,\mathrm{Hz} \,.$$

5) a) Wenn der Körper am höchsten Punkt nicht herunterfallen soll, muss die Gewichtskraft vollständig für die Zentripetalkraft benötigt werden:

$$F_z = F_G \iff a_z = g \iff r\omega^2 = g$$
$$\iff f^2 = \frac{g}{4\pi^2 r} \iff f = \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4\pi^2 \cdot 2{,}6\,\mathrm{m}}} = 0{,}31\,\mathrm{Hz} \,.$$

b) Ohne Berücksichtigung der Gewichtskraft muss der Rotor die immer zum Zentrum gerichtete Zentripetalkraft $\vec{F}_z$ auf den Körper ausüben. Nun wirkt aber stets die nach unten gerichtete Gewichtskraft $\vec{F}_G$, so dass der Rotor nur die (vektorielle) Differenz ausübt: $\vec{F} = \vec{F}_z - \vec{F}_G$.
Im tiefsten Punkt sind beide genannten Kräfte entgegengesetzt, also ist die Gesamtkraft (betraglich) $F = F_z + F_G = 2F_G = 2mg = 2 \cdot 15\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 294{,}3\,\mathrm{N}$.
Im höchsten Punkt sind beide Kräfte gleichgerichtet und die Gesamtkraft ist $F = F_z - F_G = 0$. Im höchsten Punkt wird die Zentripetalkraft bereits von der Gewichtskraft aufgebracht und der Rotor übt keine Kraft auf den Körper aus.