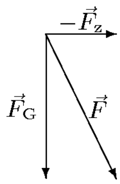
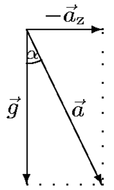
Übungen (M16)

1) Wie stark muss die äußere Schiene überhöht sein, damit ein Zug mit 216 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in einer Kurve von 900 m Radius senkrecht auf die Verbindungslinie der beiden Schienen drückt, so dass jegliche Kipp- und Schleudergefahr ausgeschlossen ist? (Spurweite = Abstand der Schienen: 1435 mm)
2) a) Welche Geschwindigkeit darf ein Auto in einer nicht überhöhten Kurve von 100 m Radius höchstens haben, wenn es bei einer Haftreibungszahl $\mu_{\text{H}} = 0{,}4$ nicht rutschen soll?
   b) Mit welcher Geschwindigkeit muss eine mit $\alpha = 5{,}7^0$ überhöhte Kurve mit Radius 100 m durchfahren werden, so dass keine Haftkräfte quer zur Fahrtrichtung zwischen Rädern und Straße auftreten?
3) Ein Zug durchfährt mit 72 km/h eine nicht überhöhte Kurve ($r = 500\,\text{m}$). Um welchen Winkel neigt sich im Innern ein aufgehängtes Lot gegen die Vertikale?
4) a) Um welchen Winkel muss sich ein Radfahrer gegen die Vertikale neigen, wenn er mit 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ einen Kreisbogen von 10 m Radius durchfährt?
   b) Wie groß muss die Haftreibungszahl μ_{H} mindestens sein, damit das Rad bei waagerechtem Boden nicht rutscht?
5) a) Der Radfahrer von Aufgabe 4) durchfährt dieselbe Kurve bei spiegelglattem (= reibungsfreiem) Boden. Wie stark muss die Bahn geneigt sein, damit keine Rutschgefahr besteht?
   b) Wie groß ist dann die Kraft F, die das Rad (Gesamtmasse 100 kg) auf den Boden ausübt?
   c) Rutscht das Fahrrad bei derselben Bahnneigung wie in Teilaufgabe a) weg, wenn es spiegelglatt ($\mu_{\text{H}} = 0$) ist und der Fahrer seine Geschwindigkeit auf unter 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ drosselt?
6) Welchen Radius hat ein Radfahrer bei 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mindestens einzuhalten, damit er bei $\mu_{\text{H}} = 0{,}5$ in einer Kurve nicht ausgleitet, wenn der Boden waagerecht ist? Um welchen Winkel muss das Rad geneigt sein?

Übungen (M16) — Lösungen





1) Die Verbindungslinie der Schienen soll senkrecht zur Richtung der Gesamtkraft $\vec{F}$ sein. Also müssen wir deren Richtung bestimmen. Die Gesamtkraft, die ein Waggon auf die Schienen überträgt, ist die resultierende Kraft $\vec{F}$ aus Gewichtskraft $\vec{F}_\mathrm{G}$ und Zentrifugalkraft $-\vec{F}_\mathrm{z}$ (siehe nebenstehende Skizze).

   Nach dem Newton'schen Grundgesetz der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ haben Kraft und Beschleunigung dieselbe Richtung, so dass wir zur Richtungsbestimmung die Beschleunigungen betrachten können. Um die *Richtung* der resultierenden Beschleunigung $\vec{a}$ zu bestimmen, berechnen wir den Winkel α, der die Abweichung von der Vertikalen angibt (siehe Skizze). Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{a_\mathrm{z}}{g}\,, \;\; \alpha = \arctan(\frac{a_\mathrm{z}}{g})\,.$$

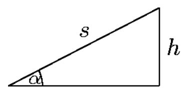
   Wir berechnen

$$a_\mathrm{z} = \frac{v^2}{r} = \frac{(216\,\mathrm{km/h})^2}{900\,\mathrm{m}} = \frac{(216 \cdot 1000\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s})^2}{900\,\mathrm{m}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

   Damit folgt schließlich

$$\alpha = \arctan(\frac{4\,\mathrm{m/s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}) \approx 22{,}18^0\,.$$

   Die resultierende Beschleunigung $\vec{a}$ bildet also mit der Vertikalen einen Winkel $\alpha = 22{,}18^0$. Die Verbindungslinie der Schienen muss denselben Winkel α mit der Horizontalen bilden, da sie ja senkrecht zur resultierenden Beschleunigung stehen soll. Man muss daher bei einer Spurweite $s = 1435\,\mathrm{mm}$ die Schienen auf der Außenseite um die Höhe h erhöhen, wobei gilt:



$$\frac{h}{s} = \sin(\alpha)\,, \quad h = s \cdot \sin(\alpha) = 1435\,\mathrm{mm} \cdot \sin(\alpha) \approx 542\,\mathrm{mm}\,.$$

2) a) Die für die Kreisbahn nötige Zentripetalkraft ist $F_z = ma_z$. Die Trägheit des Autos treibt dieses nach außen; die Reibungskraft wirkt dem entgegen nach innen. Die Zentripetalkraft ist gleich der Reibungskraft und diese beträgt maximal $F_\mathrm{H} = F_N \cdot \mu_\mathrm{H} = F_G \cdot \mu_\mathrm{H} = mg\mu_\mathrm{H}$. Für die gesuchte maximale Geschwindigkeit v gilt also

$$F_z = F_\mathrm{H} \iff a_z = \mu_\mathrm{H} g \iff \frac{v^2}{r} = \mu_\mathrm{H} g \iff v = \sqrt{r \cdot \mu_\mathrm{H} g}$$
$$\iff v = \sqrt{100\,\mathrm{m} \cdot 0{,}4 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx 19{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

   b) Die resultierende Kraft muss genau senkrecht zum Boden wirken, damit keine Kräfte quer zur Fahrtrichtung auftreten. Die resultierende Kraft muss also mit der

Vertikalen den Winkel α bilden. Dies bedeutet (siehe Skizze bei der vorangehenden Aufgabe):

$$\frac{F_z}{F_G} = \tan\alpha \iff a_z = g\tan\alpha \iff v^2 = r\cdot g\tan\alpha \iff v = \sqrt{rg\tan\alpha}$$

$$\iff v = \sqrt{100\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\tan 5{,}7^0} = 9{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

3) Die Richtung des Fadens ist die Richtung der resultierenden Kraft $\vec{F}_r = \vec{F}_G - \vec{F}_z$. Sei φ der Winkel zwischen dem Lot und der Vertikalen (vgl. die analoge Skizze beim Karussell auf dem Aufgabenblatt). Da die Richtung des Fadens die Richtung der resultierenden Kraft $\vec{F}_r = \vec{F}_G - \vec{F}_z$ ist, gilt

$$\tan\varphi = \frac{F_z}{F_G} = \frac{v^2}{rg} \iff \varphi = \arctan\left(\frac{(\frac{72000}{3600})^2}{500\cdot 9{,}81}\right) = 4{,}66^0\,.$$

4) a) Der Radfahrer muss sich soweit ‘in die Kurve legen’, dass er die Richtung der resultierenden Kraft $\vec{F} = \vec{F}_G - \vec{F}_z$ einnimmt. (Denn nur dann verläuft die Wirkungslinie der an seinem Schwerpunkt angreifenden Kraft durch den Auflagepunkt des Rades auf dem Boden und verursacht daher kein Drehmoment um diesen Drehpunkt (siehe Hebelgesetze, Drehmomentdefinition)). Wieder müssen wir also die Richtung der resultierenden Kraft $\vec{F} = \vec{F}_G - \vec{F}_z$ bestimmen; ihr Winkel α mit der Vertikalen ist die gesuchte Neigung. Wir berechnen wie oben

$$a_\mathrm{z} = \frac{v^2}{r} = \frac{(18\cdot 1000\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s})^2}{10\,\mathrm{m}} = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,$$

und daher $\alpha = \arctan(\frac{a_\mathrm{z}}{g}) = \arctan(0{,}2548) \approx 14{,}3^0$.
Der Radfahrer muss sich ungefähr 14^0 gegen die Vertikale neigen.
b) Damit das Rad die beschriebene Kreisbahn einhält, muss darauf horizontal die Zentripetalkraft $F_\mathrm{z} = m\cdot a_\mathrm{z}$ einwirken. Diese wird von der Haftreibungskraft F_H aufgebracht. Für sie gilt:

$$F_\mathrm{H} = \mu_\mathrm{H}\cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{H}\cdot F_\mathrm{G} = \mu_\mathrm{h}\cdot mg$$

(F_N ist die Normalkraft, die hier mit der Gewichtskraft zusammenfällt.) Wir erhalten so als Minimalbedingung für die Haftreibungszahl:

$$a_\mathrm{z} = \mu_\mathrm{H}\cdot g \iff \mu_\mathrm{H} = \frac{a_\mathrm{z}}{g} = 0{,}2548$$

Die Haftreibungszahl muss mindestens 0,2548 betragen, damit das Fahrrad bei der beschriebenen Kurvenfahrt nicht wegrutscht.

5) a) Die Straße muss so geneigt sein, dass der Radfahrer senkrecht auf ihr fährt. (Andernfalls gäbe es eine Kraftkomponente parallel zur Bodenebene, die bei Haftreibungszahl 0 zum Wegrutschen führen würde.) Die notwendige Neigung der Straße wäre also gleich dem in der vorangehenden Aufgabe bestimmten Winkel $\alpha = 14{,}3^0$.
b) Die Gesamtkraft F berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras aus den Kraftkomponenten $F_\mathrm{G} = m\cdot g$ und $F_\mathrm{z} = m\cdot a_\mathrm{z}$. Mit den Ergebnissen von 4) gilt

$$F = m\cdot\sqrt{g^2 + a_\mathrm{z}^2} = 100\,\mathrm{kg}\cdot\sqrt{9{,}81^2 + 2{,}5^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1012{,}35\,\mathrm{N}\,.$$

6) Die Haftreibungskraft kann maximal $F_\mathrm{H} = \mu_\mathrm{H} \cdot F_\mathrm{N} = 0,5 \cdot F_\mathrm{G} = 0{,}5 \cdot mg$ betragen. Damit kann auch die Zentripetalkraft maximal diesen Wert haben, also

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = F_\mathrm{z} = F_\mathrm{H} = 0,5 \cdot mg \iff r = \frac{2v^2}{g} = 2 \cdot \frac{(36 \cdot 1000\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s})^2}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 20{,}39\,\mathrm{m}\,.$$

Den gesuchten Winkel berechnen wir wie in einer früheren Aufgabe:

$$\alpha = \arctan(\frac{a_\mathrm{z}}{g}) = \arctan(\mu_\mathrm{H}) = \arctan(0{,}5) \approx 26{,}57^0\,.$$