Übungen (M17)

1) a) Berechnen Sie für verschiedene Himmelskörper aus deren Bahndaten die Zentripetalbeschleunigungen (siehe beiliegende Datenblätter).
   b) Untersuchen Sie für Himmelskörper, die um denselben Zentralkörper kreisen, welcher Zusammenhang zwischen der Radialbeschleunigung a_z und dem Abstand r vom Zentralkörper besteht.
   [Stellen Sie dazu a_z in Abhängigkeit von r graphisch dar; formulieren Sie dann eine Vermutung über die Art des Zusammenhangs und überprüfen Sie diese anschließend durch geeignete Rechnungen.]
   c) Welcher Zusammenhang ergibt sich daraus für die Beziehung zwischen Umlaufzeit T und Abstand r?
2) a) Bestimmen Sie die Masse der Erde aus den Umlaufdaten des Mondes.
   [Literaturwert: $m_{\mathrm{Erde}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.]
   b) Welcher Wert für die Fallbeschleunigung ergibt sich aus Ihrem Ergebnis von a)?
   c) Wie lange benötigt ein künstlicher Erdsatellit zur Umrundung der Erde, wenn er in 300 km Höhe um die Erde kreist?
   d) In klaren Nächten kann man die Raumstation ISS mit bloßem Auge am Himmel beobachten. Sie benötigt für einen Umlauf 91 Minuten. In welcher Höhe über der Erde liegt ihre Umlaufbahn?
3) a) Bei einer der bemannten Mondexpeditionen kreiste eine Mondfähre in 110 km Höhe in 7130 s um den Mond. Bestimmen Sie die Mondmasse.
   b) Berechnen Sie nun die Gravitationsbeschleunigung des Mondes an seiner Oberfläche.
   c) Bestimmen Sie das Verhältnis von Erd- zu Mondmasse bzw. von Erdbeschleunigung g zur Gravitationsbeschleunigung auf dem Mond. Warum sind diese Verhältnisse verschieden?
4) a) Bestimmen Sie die Masse des Mars.
   [Literaturwert: $m_{\mathrm{Mars}} = 6{,}42 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$.]
   b) Wie groß ist die Fallbeschleunigung an der Marsoberfläche? Vergleichen Sie mit der Fallbeschleunigung auf der Erde.
5) a) Was versteht man unter geostationären Erdsatelliten?
   b) Bestimmen Sie die Höhe über der Erde, in der diese geostationären Erdsatelliten ‘stehen’.

Gravitationskonstante $G^* = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
siehe umseitige Tabellen

Physikalische Daten

Name	Durchmesser d/km	Masse $m/10^{24}$ kg
Sonne	1390000	1990000
Merkur	4880	0.330
Venus	12104	4.869
Erde	12756	5.974
Mond	3476	0.073
Mars	6794	0.642
Jupiter	142984	1900.000
Saturn	120536	568.000
Uranus	51118	86.830
Neptun	49532	102.470
Pluto	2274	0.013

Astronomische Daten

Satellit		Zentrum	r/1000km	T/d	Entdecker	entdeckt
Merkur	I	Sonne	57910	87.97	-	-
Venus	II	Sonne	108200	224.70	-	-
Erde	III	Sonne	149600	365.26	-	-
Mars	IV	Sonne	227940	686.98	-	-
Jupiter	V	Sonne	778330	4332.71	-	-
Saturn	VI	Sonne	1429400	10759.50	-	-
Uranus	VII	Sonne	2870990	30685.00	Herschel	1781
Neptun	VIII	Sonne	4504300	60190.00	Adams(9)	1846
Pluto	IX	Sonne	5913520	90800.00	Tombaugh	1930
Mond	I	Erde	384	27.32	-	-
Phobos	I	Mars	9	0.32	Hall	1877
Deimos	II	Mars	23	1.26	Hall	1877
Metis	XVI	Jupiter	128	0.29	Synnott	1979
Adrastea	XV	Jupiter	129	0.30	Jewitt(1)	1979
Amalthea	V	Jupiter	181	0.50	Barnard	1892
Thebe	XIV	Jupiter	222	0.67	Synnott	1979
Io	I	Jupiter	422	1.77	Galileo(2)	1610
Europa	II	Jupiter	671	3.55	Galileo(2)	1610
Ganymed	III	Jupiter	1070	7.15	Galileo(2)	1610
Kallisto	IV	Jupiter	1883	16.69	Galileo(2)	1610
Leda	XIII	Jupiter	11094	238.72	Kowal	1974
Himalia	VI	Jupiter	11480	250.57	Perrine	1904
Lysithea	X	Jupiter	11720	259.22	Nicholson	1938
Elara	VII	Jupiter	11737	259.65	Perrine	1905
Ananke	XII	Jupiter	21200	-631	Nicholson	1951
Carme	XI	Jupiter	22600	-692	Nicholson	1938
Pasiphae	VIII	Jupiter	23500	-735	Melotte	1908
Sinope	IX	Jupiter	23700	-758	Nicholson	1914

Astronomische Daten

Satellit		Zentrum	r/1000km	T/d	Entdecker	entdeckt
Pan	VIII	Saturn	134	0.58	Showalter	1990
Atlas	XV	Saturn	138	0.60	Terrile	1980
Prometheus	XVI	Saturn	139	0.61	Collins(3)	1980
Pandora	XVII	Saturn	142	0.63	Collins(3)	1980
Epimetheus	XI	Saturn	151	0.69	Walker(8)	1980
Janus	X	Saturn	151	0.69	Dollfus	1966
Mimas	I	Saturn	186	0.94	Herschel	1789
Enceladus	II	Saturn	238	1.37	Herschel	1789
Tethys	III	Saturn	295	1.89	Cassini	1684
Telesto	XIII	Saturn	295	1.89	Smith(6)	1980
Calypso	XIV	Saturn	295	1.89	Pascu(7)	1980
Dione	IV	Saturn	377	2.74	Cassini	1684
Helene	XII	Saturn	377	2.74	Laques(4)	1980
Rhea	V	Saturn	527	4.52	Cassini	1672
Titan	VI	Saturn	1222	15.95	Huygens	1655
Hyperion	VII	Saturn	1481	21.28	Bond(5)	1848
Iapetus	VIII	Saturn	3561	79.33	Cassini	1671
Phoebe	IX	Saturn	12952	-550.48	Pickering	1898
Cordelia	VI	Uranus	50	0.34	Voyager 2	1986
Ophelia	VII	Uranus	54	0.38	Voyager 2	1986
Bianca	VIII	Uranus	59	0.43	Voyager 2	1986
Cressida	IX	Uranus	62	0.46	Voyager 2	1986
Desdemona	X	Uranus	63	0.47	Voyager 2	1986
Julia	XI	Uranus	64	0.49	Voyager 2	1986
Portia	XII	Uranus	66	0.51	Voyager 2	1986
Rosalind	XIII	Uranus	70	0.56	Voyager 2	1986
Belinda	XIV	Uranus	75	0.62	Voyager 2	1986
Puck	XV	Uranus	86	0.76	Voyager 2	1985
Miranda	V	Uranus	130	1.41	Kuiper	1948
Ariel	I	Uranus	191	2.52	Lassell	1851
Umbriel	II	Uranus	266	4.14	Lassell	1851
Titania	III	Uranus	436	8.71	Herschel	1787
Oberon	IV	Uranus	583	13.46	Herschel	1787
Caliban	XVI	Uranus	7200	-930	Gladman	1997
Sycorax	XVII	Uranus	12200	-1280	Gladman	1997
Naiad	III	Neptun	48	0.29	Voyager 2	1989
Thalassa	IV	Neptun	50	0.31	Voyager 2	1989
Despina	V	Neptun	53	0.33	Voyager 2	1989
Galatea	VI	Neptun	62	0.43	Voyager 2	1989
Larissa	VII	Neptun	74	0.55	Reitsema	1989
Proteus	VIII	Neptun	118	1.12	Voyager 2	1989
Triton	I	Neptun	355	-5.88	Lassell	1846
Nereid	II	Neptun	5513	360.13	Kuiper	1949

Übungen (M17) — Lösungen

1) a), b): Siehe Skript, S. 31f.
c): $a_z \sim \frac{1}{r^2} \iff \frac{4\pi^2 r}{T^2} \sim \frac{1}{r^2} \iff T^2 \sim r^3$. Beachten Sie: Diese Proportionalität gilt für alle Satelliten, die um *dasselbe* Zentrum kreisen!

2) a) Der Mond umkreist die Erde auf einer Kreisbahn vom Radius $r = 384000\,\text{km}$ mit der Umlaufzeit $T = 27{,}32\,\text{d}$. Die dafür notwendige Zentripetalkraft ist die Graviatationskraft der Erde:

$$F_{\text{Grav}} = F_z \iff G^* \cdot \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Mond}}}{r^2} = m_{\text{Mond}} \cdot r \cdot \omega^2 = m_{\text{Mond}} \cdot r \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\iff m_{\text{Erde}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G^* \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (384 \cdot 10^6\,\text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot (27{,}32 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s})^2} = 6{,}02 \cdot 10^{24}\,\text{kg}\,.$$

b) Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche wird durch die Gravitationswirkung der Erde verursacht; die Gewichtskraft F_G eines Körper (Masse m) ist also nichts anderes als die Gravitationskraft F_{Grav} zwischen Erde (Masse m_{Erde}) und Körper:

$$mg = F_{\text{G}} = F_{\text{Grav}} = G^* \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m}{d^2}$$

$$\iff g = G^* \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(6378\,\text{km})^2} = 9{,}86\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Legt man statt des berechneten Wertes der Erdmasse den Literaturwert zugrunde, so erhält man

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(6378\,\text{km})^2} = 9{,}79\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

c) Ein künstlicher Erdsatellit in $h = 300\,\text{km}$ Höhe umkreist den Erdmittelpunkt auf einer Kreisbahn vom Radius $r = r_{\text{Erde}} + h = (6378 + 300)\,\text{km} = 6678\,\text{km}$. Die dafür notwendige Zentripetalkraft ist die Gravitationskraft zwischen Erde und Satellit:

$$F_{\text{Grav}} = F_z \iff G^* \cdot \frac{m_{\text{Erde}} m_{\text{Sat}}}{r^2} = m_{\text{Sat}} \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\iff T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G^* \cdot m_{\text{Erde}}} \iff T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6678\,\text{km})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg})}} = 5434\,\text{s}\,.$$

Die Umlaufzeit beträgt also 1 Stunde 30 Minuten und 34 Sekunden.
d) Mit denselben Überlegungen wie bei c) erhält man hier aus der Umlaufzeit den Bahnradius

$$r^3 = G^* \cdot \frac{m_{\text{Erde}} T^2}{4\pi^2} \iff r = \sqrt[3]{G^* \cdot \frac{m_{\text{Erde}} T^2}{4\pi^2}}$$

$$\iff r = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot (91 \cdot 60\,\text{s})^2}{4\pi^2}} = 6699\,\text{km}$$

Die Höhe über der Erdoberfläche beträgt also

$$h = (6699 - 6378)\,\mathrm{km} = 321\,\mathrm{km}\,.$$

3) a) Die Mondfähre umkreist den Mond auf einer Kreisbahn. Die notwendige Zentripetalbeschleunigung wird von der Gravitationswirkung des Mondes verursacht, also gilt

$$a_z = a_g \iff \frac{4\pi^2 r}{T^2} = G^* \frac{m_{\mathrm{Mond}}}{r^2} \iff m_{\mathrm{Mond}} = \frac{4\pi^2 r^3}{G^* T^2}\,.$$

Dabei ist r der Bahnradius der Mondfähre, also $r = r_{\mathrm{Mond}} + h = (1738 + 110)\,\mathrm{km} = 1848\,\mathrm{km}$. Mit diesem Wert und der angegebenen Umlaufzeit $T = 7130\,\mathrm{s}$ erhalten wir als Mondmasse

$$m_{\mathrm{Mond}} = \frac{4\pi^2 \cdot (1848 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot (7130\,\mathrm{s})^2} = 734{,}79 \cdot 10^{20}\,\mathrm{kg} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}\,.$$

b) Für die Gravitationsbeschleunigung an der Mondoberfläche gilt

$$a_g = G^* \cdot \frac{m_{\mathrm{Mond}}}{r_{\mathrm{Mond}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{(1738 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^2} = 1{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

c) Es gilt

$$\frac{m_{\mathrm{Erde}}}{m_{\mathrm{Mond}}} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{7{,}35 \cdot 10^{22}} = 81{,}22\,, \qquad \frac{g_{\mathrm{Erde}}}{g_{\mathrm{Mond}}} = \frac{9{,}81}{81{,}22} = 6{,}05\,.$$

Das Verhältnis der Massen ist wesentlich größer als das Verhältnis der Gravitationsbeschleunigungen an den Oberflächen. Dies liegt daran, dass die Gravitationsbeschleunigung zwar proportional zur Masse, aber umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Kraftzentrum ist: Bei der größeren Erde ist zwar die Masse wesentlich größer, da aber auch der Abstand zum Kraftzentrum wesentlich größer ist, ist das Verhältnis der Gravitationsbeschleunigungen nicht so groß wie das der Massen.

4) a) Um die Masse des Mars zu bestimmen, benötigt man einen um den Mars kreisenden Satelliten, einen Marsmond. Aus der zur Aufgabenstellung gehörenden Tabelle astronomischer Daten entnehmen wir: Der Mars hat zwei Monde, einer davon, Phobos hat den Bahnradius $r = 9000\,\mathrm{km}$ und die Umlaufzeit $T = 0{,}32\,\mathrm{d}$. Daraus erhalten wir (wie in Aufgabe 1 für die Erde) die Marsmasse

$$m_{\mathrm{Mars}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G^* \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (9 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot (0{,}32 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2} = 5{,}64 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}\,.$$

Verwendet man die Bahndaten des zweiten Marsmondes, Deimos, so erhält man

$$m_{\mathrm{Mars}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G^* \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (23 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot (1{,}26 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2} = 6{,}08 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}\,.$$

Der Mittelwert $5{,}86 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$ ist also ein guter Näherungswert für die Marsmasse.
b) Auch dieser Aufgabenteil verläuft analog zu Aufgabe 1). Wir erhalten für die Marsoberfläche

$$g_{\mathrm{Mars}} = G^* \cdot \frac{m_{\mathrm{Mars}}}{r_{\mathrm{Mars}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{5{,}86 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}}{(3397\,\mathrm{km})^2} = 3{,}39\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}35 \cdot g_{\mathrm{Erde}}\,.$$

5) a) Ein *geostationärer* Erdsatellit ist ein Satellit, der die Erde umkreist und sich dabei immer über demselben Punkt der Erde befindet. Daraus ergibt sich, dass die Umlaufzeit T gleich der Umdrehungszeit der Erde sein muss, also $T = 24\,\mathrm{h}$. Es muss aber noch eine zweite Bedingung erfüllt sein: Die Kreisbahn des Erdsatelliten und des darunterliegenden Punktes der Erdoberfläche müssen konzentrisch sein (gleiches Zentrum haben). Da ein Erdsatellit um das *Zentrum* der Erde kreist, ein Punkt auf der Erdoberfläche aber um die *Erdachse,* kann der Erdsatellit nur über dem Äquator 'stehen'.
b) Aus der Umlaufzeit $T = 24\,\mathrm{h}$ ergibt sich (wie in der ersten Aufgabe) der Bahnradius

$$r = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot (24 \cdot 3600\,\mathrm{s})^2}{4\pi^2}} = 42227\,\mathrm{km}$$

Abzüglich des Erdradius ergibt sich so als Höhe über der Erdoberfläche

$$h = (42227 - 6378)\,\mathrm{km} = 35849\,\mathrm{km} \approx 36000\,\mathrm{km}\,.$$