Übungen (M18)

1) Ein Körper vollführt eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $\hat{s} = 10\,\text{cm}$ und der Periodendauer $T = 2\,\text{s}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet er sich in der Ruhelage mit positiver Geschwindigkeit.
a) Stellen Sie die Werte der Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung für die Zeiten $t = \frac{n}{8}T$ (für $n = 0, 1, \ldots, 8$) in einer Tabelle zusammen.
b) Zeichnen Sie die Graphen der drei Größen in Abhängigkeit der Zeit jeweils mit geeignetem Maßstab (z.B. 12 cm für T).

2) a) Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm eines Federpendels der Masse $m = 2\,\text{kg}$ an einer Feder der Härte $D = 0{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ mit der Amplitude $\hat{s} = 4\,\text{cm}$.
b) Tragen Sie die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungsvektoren für die Zeiten $t = \frac{n}{8}T$ (für $n = 0, 1, \ldots, 8$) ein. Wählen Sie auf der Zeitachse 12 cm für T. (Gehen Sie wieder davon aus, dass das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ mit positiver Geschwindigkeit durch die Ruhelage geht.)

3) Die Elongation eines harmonischen Oszillators beträgt $0{,}2\,\text{s}$ nach dem Nulldurchgang $s = 4\,\text{cm}$. Die Amplitude ist $\hat{s} = 6\,\text{cm}$. Berechnen Sie Frequenz, Periodendauer und maximale Geschwindigkeit.

4) Zu welchen Zeiten nach dem Nulldurchgang erreicht die Elongation einer harmonischen Schwingung mit $\hat{s} = 5\,\text{cm}$ und $f = 0{,}4\,\text{Hz}$ die Werte
a) $s_1 = 8\,\text{mm}$,
b) $s_2 = 2\,\text{cm}$,
c) $s_3 = 4\,\text{cm}$?

5) Hängt man einen Körper der Masse $400\,\text{g}$ an eine Schraubenfeder, so verlängert sie sich um $10\,\text{cm}$. Mit welcher Periodendauer schwingt dieses Federpendel?

6) Bei einem Federpendel betragen betragen die Frequenz $f = 8\,\text{Hz}$ und die Federhärte $D = 3{,}8\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Wie groß ist die schwingende Masse m?

7) Bei einem Federpendel wird die Periodendauer T dreimal so groß, wenn die anhängende Masse m um $m_1 = 50\,\text{g}$ vergrößert wird. Wie groß ist die ursprüngliche Masse m?

8) a) Wie groß wird die Periodendauer, wenn bei gleicher Masse m zwei Federn mit den Konstanten D_1 und D_2 aneinander gehängt werden?
b) Leiten Sie eine Formel her, mit der man die Schwingungsdauer T des gekoppelten Systems aus den Schwingungsdauern T_1, T_2 der Einzelsysteme berechnen kann. [Tip: Betrachten Sie T^2.]

9) An ein Federpendel mit der Masse $m = 854\,\text{g}$ wird zusätzlich eine Masse $m_1 = 150\,\text{g}$ mit einem Faden angehängt. Dadurch verlängert sich die Feder um $12{,}3\,\text{cm}$. Nun wird der Faden durchschnitten und die zusätzliche Masse wieder abgetrennt. Berechnen Sie die Periodendauer T sowie die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse m.

10) Eine an eine Feder angehängte Kugel ($m = 2\,\text{kg}$), die um $2\,\text{cm}$ nach unten ausgelenkt und dann sich selbst überlassen wurde, schwingt mit einer Frequenz $f = 4\,\text{Hz}$.
a) Um wieviel verkürzt sich die Feder, wenn man die Kugel von der Feder abhängt?
b) Wie groß ist die auf die Kugel wirkende Kraft in den Umkehrpunkten der Schwingung?

Übungen (M18) — Lösungen

1) Die Bewegungsgleichungen einer harmonischen Schwingung sind

$$s = \hat{s}\sin\omega t = \hat{s}\sin 2\pi\frac{t}{T} \quad \text{und} \quad v = \hat{v}\cos\omega t = \hat{v}\cos 2\pi\frac{t}{T} = \hat{s}\omega\cos 2\pi\frac{t}{T}\,,$$

wobei wir voraussetzen, dass $s(0) = s_0 = 0$ und $v(0) > 0$ ist. Außerdem ist wegen der Grundforderung einer harmonischen Schwingung

$$a = -ks = -\omega^2 \cdot \hat{s}\sin 2\pi\frac{t}{T}\,.$$

Aus $t = \frac{n}{8}T$ ergibt sich $\omega t = 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\cdot\frac{n}{8} = n\cdot\frac{\pi}{4}$. Wegen $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ erhält man aus den bekannten Symmetrien von sin und cos die folgende Tabelle:

t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3T}{8}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5T}{8}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{7T}{8}$	T
s	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{s}$	$\hat{s}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{s}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{s}$	$-\hat{s}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{s}$	0
v	$\hat{v}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{v}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{v}$	$-\hat{v}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{v}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{v}$	$\hat{v}$
a	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{a}$	$-\hat{a}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{a}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{a}$	$\hat{a}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\hat{a}$	0

Mit den gegebenen Werten $T = 2\,\mathrm{s}$ und $\hat{s} = 10\,\mathrm{cm}$ gilt

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{2\,\mathrm{s}} = \pi\,\mathrm{Hz} \approx 3{,}14\,\mathrm{Hz}\\
\hat{v} &= \hat{s}\cdot\omega = 31{,}42\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\\
\hat{a} &= \hat{s}\cdot\omega^2 = 98{,}7\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

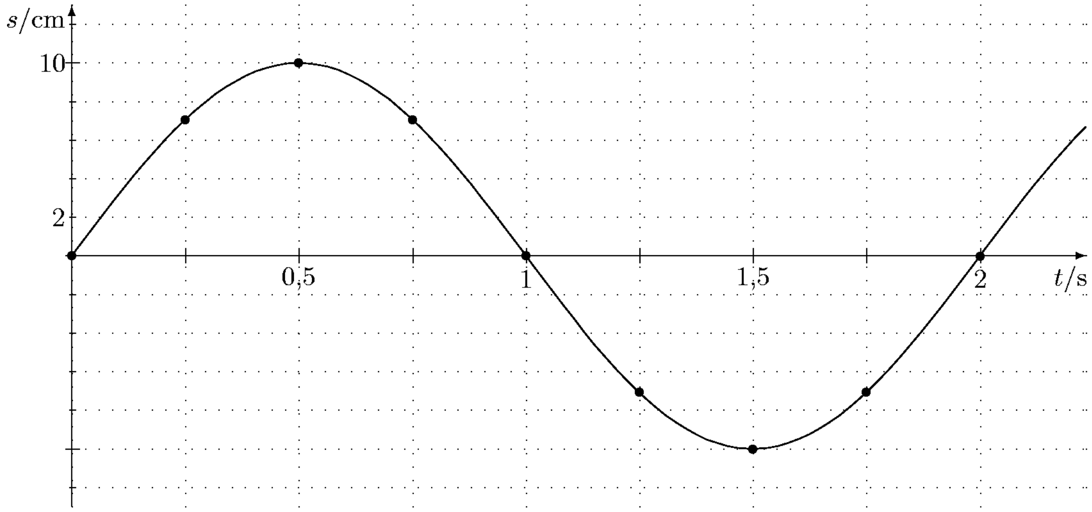
und damit dann

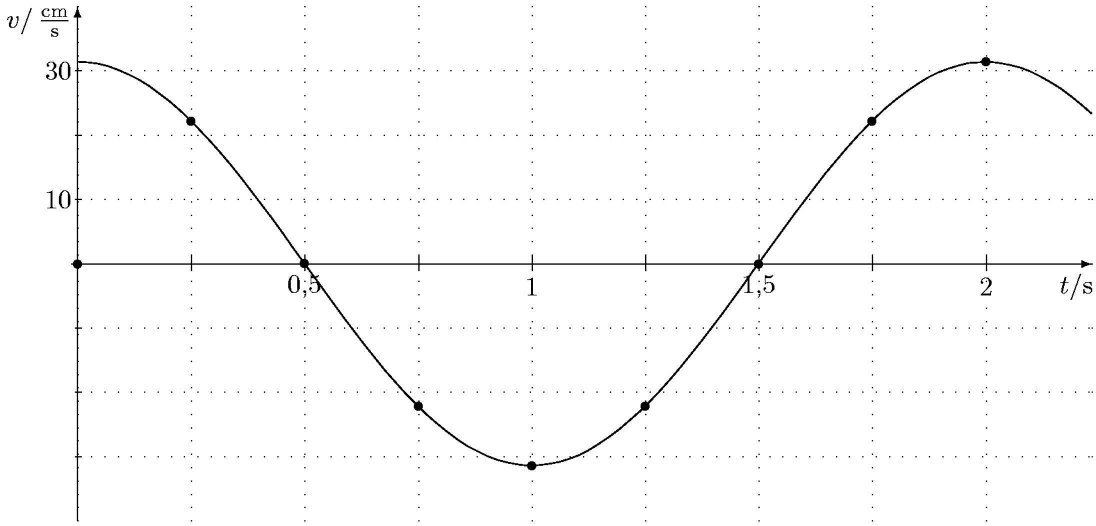
$$s = 10\,\mathrm{cm}\cdot\sin\pi t\,, \quad v = 31{,}42\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\cdot\cos\pi t\,, \quad a = -98{,}7\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\sin\pi t\,.$$

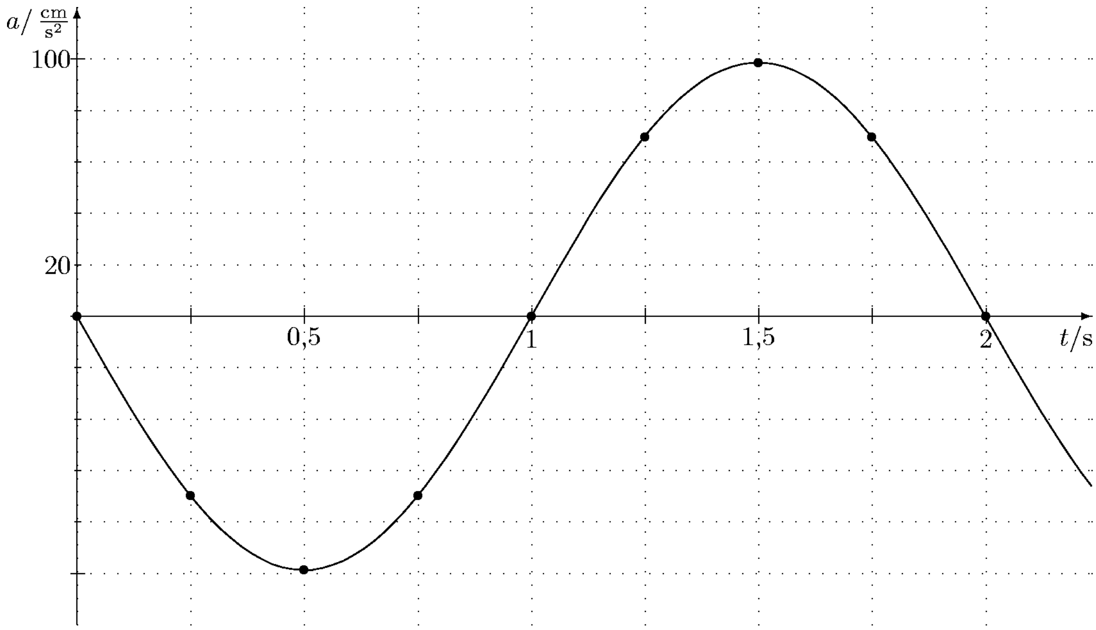
Dies ergibt dann die folgenden numerischen Werte

$t/\,\mathrm{s}$	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
$s/\,\mathrm{cm}$	0	7,07	10	7,07	0	−7,07	−10	−7,07	0
$v/\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$	31,42	22,21	0	−22,21	−31,42	−22,21	0	22,21	31,42
$a/\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$	0	−69,79	−98,7	−69,79	0	69,79	98,7	69,79	0

und die auf der nächsten Seite dargestellten Graphen für s, v und a.


s/cm
10
2
0,5
1
1,5
2
t/s


v/ cm/s
30
10
0,5
1
1,5
2
t/s


a/ cm/s²
100
20
0,5
1
1,5
2
t/s

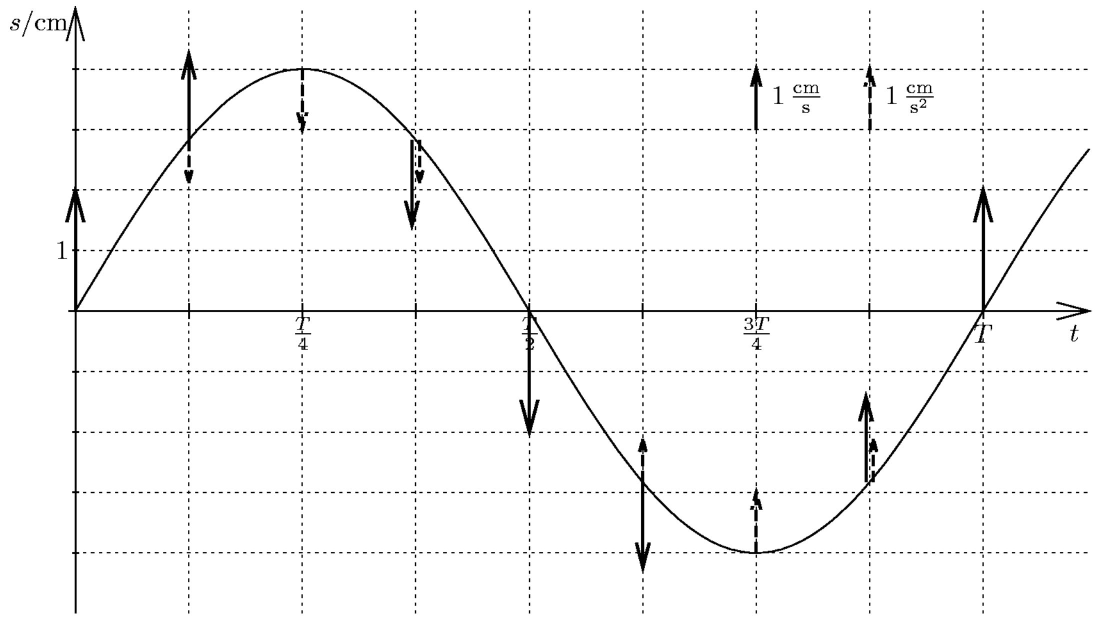
2) Die Schwingungsdauer ergibt sich aus

$$\omega^2 = k = \frac{D}{m} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Hz}^2 \iff \omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{Hz} \iff T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\,\mathrm{s} = 12{,}57\,\mathrm{s}\,.$$

Für das Weg-Zeit-Gesetz gilt dann (wegen $s_0 = 0$ und Geschwindigkeit $v_0 > 0$)

$$s = \hat{s}\sin\omega t = 4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{T}\,.$$

Dies ergibt den folgenden Graphen



Geschwindigkeit und Beschleunigung sind jeweils als Vektoren dargestellt, die Beschleunigung gestrichelt. Die Einheiten für die Vektordarstellung sind angegeben. Es gilt $v = \hat{v}\cos 2\pi\frac{t}{T}$ mit $\hat{v} = \hat{s}\omega = 4\,\mathrm{cm}\cdot 0{,}5\,\mathrm{Hz} = 2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Und $a = -\hat{a}\sin 2\pi\frac{t}{T}$ mit $\hat{a} = k\hat{s} = \omega^2\hat{s} = 4\,\mathrm{cm}\cdot 0{,}25\,\mathrm{Hz}^2 = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$.

3) Es gilt

$$s = \hat{s}\sin\omega t \iff \sin\omega t = \frac{s}{\hat{s}}\,.$$

Nun ist zwar $\frac{s}{\hat{s}} = \frac{2}{3}$ bekannt, aber es gibt viele Winkel ωt mit diesem Sinuswert. Der *kleinste* darunter ist

$$\omega t = \varphi_1 := \arcsin\frac{2}{3} = 0{,}73\,.$$

[Beachten Sie, dass dies das Bogenmaß ist.]
Der zweite Winkel (im Bereich $[0,\pi]$) ist $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, alle anderen Winkel sind dann $\varphi_1 + 2k\pi$, $\varphi_2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Der erste Winkel $\omega t = \varphi_1$ führt bei $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ zu

$$\omega = \frac{0{,}73}{0{,}2\,\mathrm{s}} = 3{,}65\,\mathrm{Hz}\,,$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}58\,\mathrm{Hz}\,,$$

$$T = \frac{1}{f} = 1{,}72\,\mathrm{s}\,,$$

$$\hat{v} = \hat{s}\cdot\omega = 6\,\mathrm{cm}\cdot 3{,}65\,\mathrm{Hz} = 21{,}89\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

Entsprechend berechnet man die gesuchten Werte für die anderen Winkel.

4) Es ist $T = \frac{1}{f} = 2{,}5\,\mathrm{s}$. Die angegebenen Werte für s werden mehrfach angenommen, innerhalb einer Schwingungsperiode zweimal.

$$s = \hat{s}\sin\omega t = \hat{s}\sin 2\pi\frac{t}{T} = 5\,\mathrm{cm}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{2{,}5\,\mathrm{s}}\,.$$

Für den kleinsten t-Wert bedeutet dies

$$\sin 2\pi\frac{t}{T} = \frac{s}{\hat{s}} \iff t = T\cdot\frac{\arcsin\frac{s}{\hat{s}}}{2\pi}\,.$$

Dies ergibt für die gegebenen Elongationen

$$\begin{aligned} t_1 &= 2{,}5\,\mathrm{s}\cdot\frac{\arcsin\frac{0.8}{5}}{2\pi} = 0{,}06\,\mathrm{s}\,,\\ t_2 &= 2{,}5\,\mathrm{s}\cdot\frac{\arcsin\frac{2}{5}}{2\pi} = 0{,}16\,\mathrm{s}\,,\\ t_3 &= 2{,}5\,\mathrm{s}\cdot\frac{\arcsin\frac{4}{5}}{2\pi} = 0{,}37\,\mathrm{s}\,. \end{aligned}$$

Diese angegebenen Zeiten sind jeweils der früheste Zeitpunkt, zu dem die vorgegebenen Elongationen erreicht werden! Die zweiten Zeitpunkte innerhalb der ersten Schwingungsperiode liegen symmetrisch zum ersten Umkehrpunkt, finden also zu den Zeiten $t'_k = \frac{T}{2} - t_k$ $(k = 1,2,3)$ statt. Konkret: $t'_1 = 1{,}19\,\mathrm{s}$, $t'_2 = 1{,}09\,\mathrm{s}$, $t'_3 = 0{,}88\,\mathrm{s}$.

5) Wir bestimmen zunächst die Federhärte

$$D = \frac{F}{l} = \frac{0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}1\,\mathrm{m}} = 39{,}24\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

Daraus erhalten wir die Schwingungsdauer durch

$$\omega^2 = k = \frac{D}{m} \iff T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}4\,\mathrm{kg}}{39{,}24\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0{,}63\,\mathrm{s}\,.$$

6) Es gilt

$$\omega^2 = k = \frac{D}{m} \iff m = \frac{D}{4\pi^2 f^2} = \frac{380\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{4\pi^2\cdot 8^2\,\mathrm{Hz}^2} = 0{,}15\,\mathrm{kg}\,.$$

7) Es gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{und} \quad 3T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_1}{D}}\,.$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, so folgt

$$3 = \sqrt{\frac{m+m_1}{m}} \iff 9m = m + m_1 \iff m = \frac{m_1}{8} = 6{,}25\,\mathrm{g}\,.$$

Kürzer: Die Schwingungsdauer T ist proportional zur Wurzel der Masse. Wenn sich also T verdreifacht, so muss sich die Masse verneunfacht haben: $m + m_1 = 9m$.

8) a) Bei aneinander gehängten Federn addieren sich die Verlängerungen: $s = s_1 + s_2$ bei gleicher Masse m. Damit addieren sich die Kehrwerte der Federhärten:

$$D = \frac{mg}{s_1 + s_2} \iff \frac{1}{D} = \frac{s_1}{mg} + \frac{s_2}{mg} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$$

Dies ergibt für die Periodendauer der gekoppelten Federn

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{m(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2})}\,.$$

b) Daraus erhält man

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{D} = 4\pi^2(\frac{m}{D_1} + \frac{m}{D_2}) = T_1^2 + T_2^2\,.$$

Die *Quadrate* der Schwingungsdauern der Einzelsysteme addieren sich zum Quadrat der Schwingungsdauer des Gesamtsystems.

9) Aus der zusätzlichen Verlängerung $l_1 = 12{,}3\,\mathrm{cm}$ durch die Masse m_1 ergibt sich die Federhärte

$$D = \frac{m_1 g}{l_1} = \frac{0{,}15\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}123\,\mathrm{m}} = 11{,}96\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

Nach dem Abtrennen von m_1 ist die *schwingende* Masse gerade $m = 854\,\mathrm{g}$. Die Schwingungsdauer ergibt sich daher zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}854\,\mathrm{kg}}{11{,}96\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1{,}68\,\mathrm{s}\,.$$

Die maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung hängt ab von der Amplitude $\hat{s}$. Diese ist in diesem Fall identisch mit der Verlängerung l_1, da die Schwingung mit dem Durchschneiden des Fadens beginnt. In diesem Moment beträgt die Entfernung aus der ursprünglichen Ruhelage der Masse m gerade $l_1 = 12{,}3\,\mathrm{cm}$. Mit $\hat{s} = 12{,}3\,\mathrm{cm}$ erhält man dann

$$\hat{v} = \hat{s}\cdot\omega = 12{,}3\,\mathrm{cm}\cdot\frac{2\pi}{1{,}68\,\mathrm{s}} = 46{,}04\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,,$$
$$\hat{a} = \hat{s}\cdot\omega^2 = 12{,}3\,\mathrm{cm}\cdot\frac{4\pi^2}{(1{,}68\,\mathrm{s})^2} = 172{,}31\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

10) a) Wir bestimmen aus der Frequenz die Federhärte:

$$\omega^2 = k = \frac{D}{m} \iff D = m\cdot 4\pi^2 f^2$$

und aus $F = Ds$ dann die Verkürzung

$$s = \frac{F}{D} = \frac{mg}{m\cdot 4\pi^2 f^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4\pi^2\cdot(4\,\mathrm{Hz})^2} = 1{,}55\,\mathrm{cm}\,.$$

Beachten Sie, dass zur Beantwortung der Frage a) weder die Masse m noch die Amplitude bekannt sein muss.

b) Die maximale Kraft ist

$$\hat{F} = D\hat{s} = m\cdot 4\pi^2 f^2\cdot\hat{s} = 2\,\mathrm{kg}\cdot 4\pi^2\cdot(4\,\mathrm{Hz})^2\cdot 0{,}02\,\mathrm{m} = 25{,}27\,\mathrm{N}\,.$$