Übungen (M19)

1) Eine Kugel der Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ hängt an einem leichten Faden der Länge $l = 2{,}40\,\mathrm{m}$ (Fadenpendel).
a) Berechnen Sie die Periodendauer T für einen Ort, an dem die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beträgt.
b) An einem anderen Ort misst man mit demselben Pendel die Schwingungsdauer $T = 3{,}12\,\mathrm{s}$. Wie groß ist dort die Erdbeschleunigung?

2) Die Länge eines Sekundenpendels – das ist ein Pendel, das für eine Halbschwingung eine Sekunde braucht – beträgt am Äquator $l_1 = 99,09\,\mathrm{cm}$, am Pol $l_2 = 99,61\,\mathrm{cm}$ und auf 45^0 geographischer Breite $l_3 = 99{,}35\,\mathrm{cm}$.
a) Berechnen Sie die zugehörigen Erdbeschleunigungen.
b) Berechnen Sie die Radialbeschleunigungen der Erdrotation an diesen Stellen. Vergleichen Sie.

3) Ein Fadenpendel schwingt mit der Periodendauer $T_1 = 2{,}15\,\mathrm{s}$. Wenn man den Faden um $80\,\mathrm{cm}$ verlängert, erhöht sich die Periodendauer auf $T_2 = 2{,}8\,\mathrm{s}$. Berechnen Sie die Fallbeschleunigung für den Ort, an dem das Pendel schwingt.

4) In einem U-Rohr konstanten Querschnitts befindet sich eine Flüssigkeitssäule der Gesamtlänge l.
a) Zeigen Sie, dass diese eine harmonische Schwingung ausführt, wenn man kurz in das eine Rohrende bläst. Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor k zwischen Beschleunigung und Elongation.
b) Zeigen Sie, dass die Periodendauer nur von der Länge der Flüssigkeitssäule abhängt. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer.

5) Ein mit Bleikugeln beschwertes Reagenzglas der Gesamtmasse m vom Querschnitt A schwimmt in einer Flüssigkeit der Dichte ρ. Drückt man es etwas tiefer in die Flüssigkeit und lässt es los, schwingt es, wenn auch stark gedämpft. Man beweise, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt, und berechne die Periodendauer T (Archimedisches Prinzip!).

6) Quer durch den Erdkörper wird ein gerader, durch den Erdmittelpunkt gehender Tunnel gebohrt. Zeigen Sie, dass ein Körper, den man in diesen Tunnel fallen lässt, eine harmonische Schwingung ausführt (Reibungskräfte vernachlässigen), und berechnen Sie seine Periodendauer. (Wir betrachten die Erde als homogene Kugel. Die Gravitationswirkung im Innern der Erde wird nur von der Masse der Kugel bestimmt, deren Radius gleich dem Abstand r vom Erdmittelpunkt ist. Die Gravitationswirkungen der äußeren Schale heben sich gegenseitig auf!)

Übungen (M19) — Lösungen

1) a) Beim Normwert $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ergibt sich als Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}4\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 3{,}1078\,\mathrm{s}\,.$$

b) Umgekehrt kann man aus der Schwingungsdauer recht genau den Ortsfaktor bestimmen:

$$\omega^2 = k = \frac{g}{l} \iff g = l\omega^2 = l\cdot\frac{4\pi^2}{T^2} = 2{,}4\,\mathrm{m}\cdot\frac{4\pi^2}{(3{,}12\,\mathrm{s})^2} = 9{,}73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

2) a) Aus $\omega^2 = k = \frac{g}{l}$ erhalten wir $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, also ergeben sich bei einer Schwingungsdauer $T = 2\,\mathrm{s}$ aus den angegebenen Längen die folgenden Fallbeschleunigungen an den verschiedenen Orten

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{4\pi^2 l_1}{T^2} = 9{,}7798\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\\ g_2 &= \frac{4\pi^2 l_2}{T^2} = 9{,}8311\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\\ g_3 &= \frac{4\pi^2 l_3}{T^2} = 9{,}8055\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,. \end{aligned}$$

b) Die Radialbeschleunigung der Erdrotation beträgt am Äquator

$$a_{z1} = r_E\omega^2 = 6378\,\mathrm{km}\cdot\frac{4\pi^2}{(24\cdot 3600\,\mathrm{s})^2} = 0{,}0337\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Auf einer geographischen Breite α reduziert sich der Abstand r von der Drehachse auf $r_E\cos\alpha$, so dass sich auch die Radialbeschleunigung mit dem Faktor $\cos\alpha$ multipliziert:

$$a_{z3} = \cos(45^0)\cdot a_{z1} = 0{,}0239\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Am Pol schließlich findet keine Rotation statt, wirkt also auch keine Radialbeschleunigung: $a_{z2} = 0$.
Die der Zentripetalkraft entgegen gerichtete Trägheitskraft (Zentrifugalkraft) reduziert die Gewichtskraft und damit die Fallbeschleunigung. Dies erklärt aber nicht vollständig den Unterschied zwischen g_1 und g_2:

$$g_2 - g_1 = (983{,}11 - 977{,}98)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 5{,}13\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,,\quad a_{z1} = 3{,}37\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Ein weiterer Grund für unterschiedliche Fallbeschleunigungen ist der unterschiedliche Abstand zum Erdmittelpunkt und damit die unterschiedliche Gravitationswirkung an der Oberfläche zu nennen: Die Erde ist an den Polen abgeflacht und am

Äquator ‘bauchig’. Da die Gravitationswirkung mit dem Quadrat des Abstandes vom Zentrum abnimmt, wirken sich diese Unterschiede deutlich aus.
Beim Vergleich mit g_3 ist zusätzlich zu beachten, dass die Radialbeschleunigung senkrecht zur Erdachse (!) wirkt. Nur die Vertikalkomponente der Radialbeschleunigung, das ist die Komponente senkrecht zur Erdoberfläche, reduziert das Gewicht; sie beträgt nur

$$a_{z3} \cdot \cos\alpha = 2{,}39\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cos 45^0 = 1{,}69\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Der Unterschied zwischen den Fallbeschleunigungen ist dagegen

$$g_3 - g_2 = (983{,}11 - 980{,}55)\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}57\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

3) Wir gehen aus von der Beziehung

$$\omega^2 = k = \frac{g}{l} \iff g = \omega^2 l = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,.$$

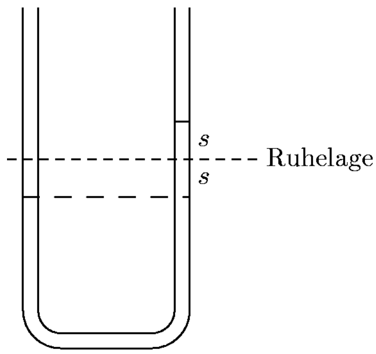
Dies ergibt (für die ursprüngliche Fadenlänge l und die Verlängerung $\Delta l = 80\,\mathrm{cm}$)

$$\frac{4\pi^2 l}{T_1^2} = g = \frac{4\pi^2 (l+\Delta l)}{T_2^2} \iff \frac{l+\Delta l}{l} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$
$$\iff \frac{\Delta l}{l} = \frac{T_2^2}{T_1^2} - 1 = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} \iff l = \frac{T_1^2 \Delta l}{T_2^2 - T_1^2}\,.$$

und damit

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \Delta l}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}8\,\mathrm{m}}{(2{,}8^2 - 2{,}15^2)\,\mathrm{s}^2} = 9{,}816\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

4) Wenn die Flüssigkeitsäule in beiden Schenkeln des U-Rohrs auf gleicher Höhe steht, bleibt sie in Ruhe. Durch das Hineinblasen werden die beiden Schenkel auf unterschiedliche Höhe gebracht. Wir fixieren einen Schenkel des U-Rohrs. Die Entfernung zwischen der Oberkante der Flüssigkeitssäule und der Ruhelage ist die Elongation s (siehe Skizze). Die Rückstellkraft wird gegeben durch das Gewicht der *überstehenden* Flüssigkeitssäule, also durch eine Flüssigkeitssäule der Höhe $h = 2s$. Mit dem Querschnitt A und der Dichte ρ der Flüssigkeit erhält man



$$F = F_G = V\rho g = hA \cdot \rho g = 2s \cdot A\rho g\,.$$

Damit ist die Kraft F proportional zur Elongation s: Es liegt eine harmonische Schwingung vor.
Um die Beschleunigung a zu ermitteln, muss man zunächst die schwingende Masse m bestimmen. Dies ist die Masse der gesamten Flüssigkeit, also mit der Länge l der Flüssigkeitssäule:

$$m = Al\rho\,, \quad a = \frac{F}{m} = \frac{2sA\rho g}{Al\rho} = \frac{2g}{l} \cdot s\,.$$

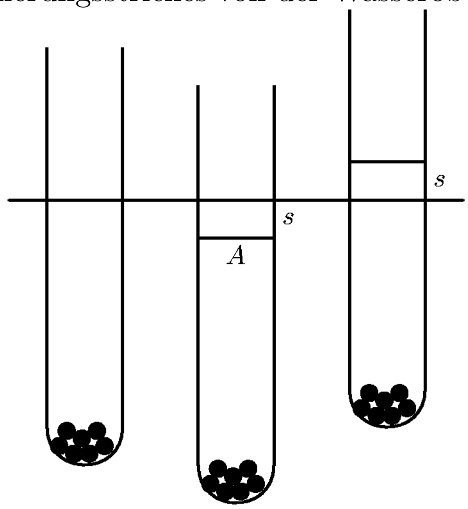
Damit ist der Proportionalitätsfaktor zwischen a und s gerade

$$k = \frac{2g}{l}$$

und folglich

$$\omega^2 = \frac{2g}{l} \iff T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\,.$$

5) Wir markieren beim ruhenden Reagenzglas die Wasseroberfläche (siehe nachfolgende Skizze). Wird das Glas in das Wasser gedrückt, so ist die Elongation s die Entfernung des Markierungsstriches von der Wasseroberfläche. Die Rückstellkraft



ist der zusätzliche Auftrieb des Reagenzglases. Dieser ist das Gewicht der zusätzlich verdrängten Flüssigkeit, also

$$F_A = V\rho g = As\rho g\,.$$

Die durch diese Rückstellkraft erzeugte Beschleunigung treibt das Reagenzglas wieder nach oben zur Ruhelage. Durch die Trägheit bewegt sich das Reagenzglas über die Ruhelage hinaus nach oben. In dieser Phase reduziert sich der Auftrieb weiter und die resultierende Kraft aus Gewicht und Auftrieb ist nun nach unten gerichtet. Die Rückstellkraft ist wieder betraglich $F_A = A\rho g \cdot s$, jetzt mit der Elongation s nach oben. In jeder Phase der Schwingung gilt also

$$a = \frac{F_A}{m} = \frac{\rho A g}{m} \cdot s\,.$$

Damit ist a proportional zu s: die Schwingung ist harmonisch mit dem Proportionalitätsfaktor $k = \dfrac{\rho A g}{m}$. Für die Schwingungsdauer ergibt sich dann

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}}\,.$$

6) Selbstverständlich ist dies eine äußerst fiktive Aufgabenstellung!
Durch die Gravitationswirkung der Erde erfährt der Körper immer eine zum Erdmittelpunkt gerichtete (Rückstell-)Kraft. Es entsteht also eine Schwingung mit dem Erdmittelpunkt als Ruhelage und den Umkehrpunkten an der Erdoberfläche. Befindet sich ein Körper der Masse m im Abstand r vom Erdzentrum, so ist (gemäß den Angaben der Aufgabenstellung) die wirkende Gravitationskraft

$$F = G^* \cdot \frac{Mm}{r^2}\,,$$

wobei M die Masse der Teil-Erdkugel vom Radius r ist. Da die Erde als homogen angenommen wird, hat sie eine konstante Dichte ρ und es gilt

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Damit gilt für die Rückstellkraft bzw. momentane Beschleunigung

$$F = \frac{G^* \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G^* \rho m \cdot r\,, \quad a = \frac{F}{m} = \frac{4}{3}\pi G^* \rho \cdot r\,.$$

Also ist die Beschleunigung a proportional zur Elongation r, die Schwingung ist harmonisch und es gilt für den Proportionalitätsfaktor

$$k = \frac{a}{r} = \frac{4}{3}\pi G^* \rho\,.$$

Dabei ist ρ die Dichte der Erde, also

$$\rho = \frac{m_\mathrm{E}}{V_\mathrm{E}} = \frac{m_\mathrm{E}}{\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{E}^3} \quad \text{und folglich} \quad k = G^* \cdot \frac{m_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^3}$$

Für die gesuchte Schwingungsdauer ergibt sich so

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_\mathrm{E}^3}{G^* m_\mathrm{E}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(6378\,\mathrm{km})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} \approx 5072\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}\ 32\,\mathrm{s} \end{aligned}$$