Übungen (E10)

1) Bestimmen Sie die Bahn des α-Teilchens aus Übung (E9), 12. a) im Magnetfeld. Was ändert sich in den Fällen b)–d)?

2) Ein Proton (Masse $m_P = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$) bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $B = 2\,\text{T}$ mit einer Geschwindigkeit $v = 750\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ senkrecht zu den Feldlinien. Berechnen Sie den Radius seiner Kreisbahn.

3) In einem bestimmten Gebiet des interstellaren Raumes gibt es freie Elektronen mit der kinetischen Energie $10^{-3}\,\text{eV}$, die sich auf Kreisbahnen vom Radius $25\,\text{km}$ bewegen. Wie groß ist die magnetische Flussdichte, die diese Bahn verursacht?

4) Die magnetische Flussdichte in einem homogenen Magnetfeld wird zu $B = 9{,}65 \cdot 10^{-4}\,\text{T}$ bestimmt. Mit einer Spannung von $U = 210\,\text{V}$ werden Elektronen beschleunigt und dann in dieses Magnetfeld geschossen. Als Durchmesser der Kreisbahn wird $d = 10{,}2\,\text{cm}$ gemessen. Bestimmen Sie die spezifische Ladung $\dfrac{e}{m_e}$ der Elektronen und daraus die Masse.

5) Positive Ionen verschiedener Masse bewegen sich im rechten Winkel in gekreuzte E- und B-Felder hinein.
a) Skizzieren diesen Versuchsaufbau und geben Sie Orientierungen für beide Felder an, bei der positive Teilchen die Chance haben (bei passender Geschwindigkeit) die Felder *geradlinig* zu durchlaufen. Begründen Sie, dass bei Umkehrung eines Feldes positive Teilchen *niemals* (egal bei welcher Geschwindigkeit) geradlinig hindurch fliegen können.
b) Die Feldstärken sind $E = 46{,}6\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ und $B = 0{,}311\,\text{T}$. Welche Geschwindigkeit haben die Ionen, die den Bereich geradlinig durchlaufen?
c) Diese Ionen verlassen die gekreuzten Felder und treten in ein Magnetfeld gleicher Stärke ein. Einige durchlaufen eine Kreisbahn (warum?) vom Durchmesser $12\,\text{cm}$, andere von $20\,\text{cm}$. Bestimmen Sie die Massen, wenn es einfach ionisierte Atome sind.

6) Das elektrische Feld zwischen den Platten eines Geschwindigkeitsfilters in einem Massenspektrographen hat die Stärke $E = 1{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$, und die beiden Magnetfelder haben die Flussdichte $B = 0{,}6\,\text{T}$.
a) Ein Strahl einfach ionisierter Neonatome bewegt sich auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $7{,}28\,\text{cm}$. Bestimmen Sie die Masse des Neonisotops.
b) Ein anderes (häufigeres) Neonisotop besitzt die Masse $m = 3{,}32 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$. Welchen Radius beschreibt ein Strahl aus solchen Neonisotopen?

Übungen (E10) — Lösungen

1) Auf das α-Teilchen wirkt die Lorentzkraft, die immer senkrecht zur Bewegungsrichtung ist und dadurch das Teilchen auf eine Kreisbahn zwingt. Die Lorentzkraft ist dann die Zentripetalkraft für diese Bewegung. Da $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{B}$ verläuft, ist $F_L = qvB$ und man erhält:

$$F_L = F_z \iff QvB = \frac{mv^2}{r} \iff r = \frac{mv}{QB} = \frac{mv}{2eB}\,.$$

Die Geschwindigkeit des α-Teilchens ergab sich durch Betrachtung der kinetischen Energie

$$U \cdot Q = \frac{1}{2}mv^2 \iff v = \sqrt{\frac{2UQ}{m}}\,,$$

so dass sich insgesamt als Radius ergibt

$$r = \frac{m}{QB}\sqrt{\frac{2UQ}{m}} = \sqrt{\frac{2Um}{QB^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200\,\mathrm{V} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}12^2\,\mathrm{T}^2}} = 240{,}08 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Im Falle b)–d) gelten die obigen Überlegungen für die Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_n$ senkrecht zu $\vec{B}$. Es gilt zunächst $v_n = v\sin\alpha$, so dass bei abnehmendem α auch v_n abnimmt. Gemäß der oben hergeleiteten Formel für den Bahnradius gilt dann

$$r = \frac{mv_n}{QB}\,.$$

Da m, Q und B konstant sind, ist der Bahnradius r proportional zu $v_n = v\sin\alpha$. Mit abnehmendem Winkel sinkt auch der Bahnradius; für $\alpha = 0$ ergibt sich $r = 0$. Neben der Geschwindigkeitskomponente $\vec{v}_n$ gibt es aber auch noch die Komponente $\vec{v}_B$ parallel zu $\vec{B}$. Diese ändert sich nicht, da die Lorentzkraft senkrecht zu $\vec{B}$ ist. Die gesamte Bewegung ist eine Überlagerung der gleichförmigen Bewegung parallel zu $\vec{B}$ und der Kreisbewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld. Dies ist dann eine spiralförmige Bewegung um die Richtung von $\vec{B}$ herum.

2) Wieder ist die Zentripetalkraft gleich der Lorentzkraft und wie in der vorangehenden Aufgabe ergibt sich

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{mv}{eB} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 7{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 2\,\mathrm{T}} = 3{,}91 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 3{,}91\,\mathrm{mm}\,.$$

3) Aus der Energie ergibt sich die Geschwindigkeit der Elektronen:

$$W = \frac{1}{2}m_e v^2 \iff v = \sqrt{\frac{2W}{m_e}}\,.$$

Da die Zentripetalkraft durch die Lorentzkraft gegeben ist, erhält man

$$F_L = F_z \iff evB = \frac{m_e v^2}{r} \iff B = \frac{m_e v}{er} = \sqrt{\frac{2Wm_e}{e^2r^2}}$$

$$\iff B = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 2{,}5^2 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}} = 4{,}27 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{T}$$

4) Es sei $c = \frac{e}{m_e}$ die gesuchte spezifische Ladung. Mit den üblichen Energieüberlegungen erhält man

$$eU = \frac{1}{2} m_e v^2 \iff v^2 = \frac{2eU}{m_e} = 2cU\,.$$

Da sich eine Kreisbahn ergibt, muss sich das Elektron im rechten Winkel zum Magnetfeld bewegen. Da die Zentripetalkraft gleich der Lorentzkraft ist, erhält man dann

$$F_L = F_z \iff evB = \frac{m_e v^2}{r} \iff \frac{e}{m_e} Br = v$$
$$\iff (cBr)^2 = v^2 = 2cU \iff c = \frac{2U}{B^2 r^2}\,.$$

Mit den vorgegebenen Werten ($r = \frac{d}{2} = 5{,}1\,\mathrm{cm}$!) erhält man schließlich

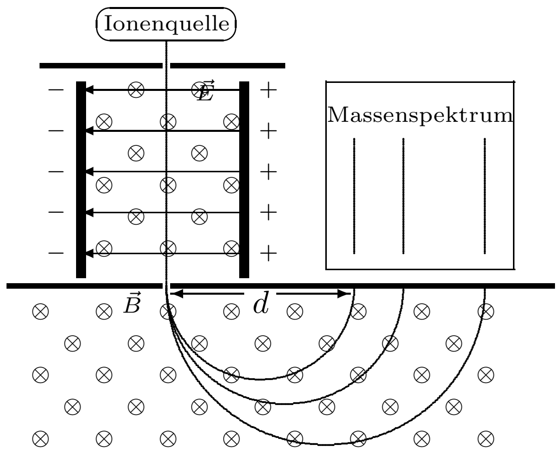
$$c = \frac{e}{m_e} = \frac{2 \cdot 210\,\mathrm{V}}{9{,}65^2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{T}^2 \cdot 0{,}051^2\,\mathrm{m}^2} = 1734{,}02 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}} = 1{,}73 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}\,.$$

Mit der Elementarladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ ergibt sich daraus für die Masse des Elektrons

$$m_e = \frac{e}{c} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{1{,}73 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}} = 9{,}24 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\,.$$

[Zum Vergleich die Normwerte $\frac{e}{m_e} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$ und $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.]

5) a) Das folgende Bild zeigt ein vollständiges Massenspektrometer. Die gekreuzten Felder befinden sich im Bereich zwischen den Platten des Kondensators. Bei der gezeigten Polung der beiden Felder erfährt ein positives Ion eine elektrische Feldkraft $\vec{F}_{\mathrm{el}}$ nach *links,* während die Lorentzkraft $\vec{F}_{\mathrm{L}}$ nach *rechts* gerichtet ist (Rechte-Hand-Regel: Daumen in Bewegungsrichtung des positiven Ions nach unten, Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes in die Zeichenebene hinein, Mittelfinger in Richtung der Lorentzkraft nach rechts). Beide Kräfte sind also einander entgegen gerichtet und können sich so (bei gleicher Stärke) aufheben, so dass die Ionen ungehindert geradlinig durch die gekreuzten Felder fliegen können.
Wird dagegen die Orientierung *eines* Feldes geändert, so wird auch die zugehörige Kraft ihre Orientierung ändern. Damit wirken dann beide Kräfte in *gleicher* Richtung und können sich folglich nicht aufheben (es sei denn, beide Kräfte wären selbst schon 0). Die resultierende Kraft wird die Ionen dann von der geradlinigen Bahn ablenken.



b) Damit positive Ionen die gekreuzten Felder geradlinig durchlaufen, müssen die beiden Feldkräfte entgegengesetzt gleich sein. Gemäß a) sind die Feldkräfte beim Eintritt des Ions entgegengesetzt, man muss also untersuchen, wann sie gleich stark sind:

$$F_{\mathrm{el}} = F_{\mathrm{L}} \iff qE = qvB \iff v = \frac{E}{B}\,.$$

Bei den gegebenen Werten erhält man

$$v = \frac{46{,}6\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}}{0{,}311\,\mathrm{T}} = 149{,}84\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

Nur positive Ionen mit dieser Geschwindigkeit können die gekreuzten Felder geradlinig durchqueren, alle anderen werden abgelenkt und können diesen Bereich nicht verlassen. [Einheitenkontrolle zur Übung: $1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Tm}} = 1\,\frac{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\cdot\mathrm{m}} = 1\,\frac{\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}}{\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{C}}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.]
c) Die Ionen treten im rechten Winkel in ein Magnetfeld ein. Die Lorentzkraft wirkt stets im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung der Ionen, immer mit der gleichen Stärke, so dass sich eine Kreisbahn ergibt. Die eingezeichnete Orientierung der Kreisbahn ergibt sich aus der in a) bestimmten Richtung der Lorentzkraft nach rechts. Die Lorentzkraft ist die alleinige Ursache der Kreisbewegung, sie stellt somit die Zentripetalkraft dar. Aufgrund dieser Tatsache kann man nun die Masse der Ionen aus dem Bahnradius ermitteln:

$$F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{z}} \iff qvB = ma_{\mathrm{z}} = m\frac{v^2}{r} \iff m = \frac{qrB}{v}\,.$$

Man sieht, man benötigt neben der Ladung und dem Magnetfeld die genaue Geschwindigkeit. Diese wird hier durch den Geschwindigkeitsfilter festgelegt.
Gemäß Vorgabe handelt es sich um einfach ionisierte Atome, also ist $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Wir berechnen die Masse der Ionen mit dem Bahndurchmesser $d = 12\,\mathrm{cm}$, also $r = 6\,\mathrm{cm}$.

$$m = \frac{erB}{v} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 0{,}311\,\mathrm{T}}{149{,}84\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = 1{,}99 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\,.$$

Die Ionen mit einem Bahndurchmesser von 20 cm haben eine größere Masse m', denn gemäß obiger Formel ist $m \sim r$ (alle anderen Größen bleiben unverändert). Aufgrund der Proportionalität ergibt sich unmittelbar

$$m' = \frac{r'}{r} \cdot m = \frac{10}{6} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} = 3{,}32 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}\,.$$

6) Den Geschwindigkeitsfilter aus gekreuzten Feldern (ein elektrisches, ein magnetisches) können nur die Teilchen geradlinig durchlaufen, für die die beiden Kräfte entgegengesetzt identisch sind:

$$F_{el} = F_L \iff qE = qvB \iff v = \frac{E}{B} = \frac{1{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}{0{,}6\,\mathrm{T}} = 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 200\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

Im folgenden haben also die Teilchen, die in das zweite Magnetfeld des Massenspektrometers eintreten, diese soeben bestimmte Geschwindigkeit.
a) Die Zentripetalkraft für die Kreisbahn ist die Lorentzkraft F_L, also

$$F_L = F_z \iff qvB = \frac{mv^2}{r} \iff qB = \frac{mv}{r} = \frac{mE}{Br} \iff m = \frac{qB^2r}{E}$$

Da die Neonionen *einfach* ionisiert waren, ist die Ladung $q = e$ und man erhält

$$m = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}6^2\,\mathrm{T}^2 \cdot 7{,}28 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{1{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}} = 3{,}49 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

b) Mit dem gleichen Ansatz erhalten wir hier

$$qB = \frac{mE}{Br} \iff r = \frac{mE}{qB^2} = \frac{mE}{eB^2} = \frac{3{,}32 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}6^2\,\mathrm{T}^2} = 6{,}92\,\mathrm{cm}$$

Auf der Fotoplatte haben die Linien dieser beiden Isotope einen Abstand von $2 \cdot (7{,}28 - 6{,}92)\,\mathrm{cm} = 7{,}2\,\mathrm{mm}$. Ein deutlich erkennbarer Unterschied für die sehr geringe Massendifferenz der Teilchen.