Übungen (E11)

1) Ein horizontal gerichtetes homogenes Magnetfeld zeigt nach Norden. Senkrecht zu seinen Feldlinien befindet sich in waagerechter Lage ein Metallstab. Welches Ende des Stabes wird negativ aufgeladen, wenn man ihn frei fallen lässt?
2) Die 6 m langen Rotorblätter eines Hubschraubers drehen sich horizontal mit 9 Umdrehungen je Sekunde an einem Ort, an dem die senkrecht nach unten gerichtete Komponente der Flussdichte des magnetischen Erdfeldes $58\,\mu$T beträgt. Wie groß ist die zwischen Drehachse und Flügelspitzen induzierte Spannung?
3) In einem Magnetfeld der Flussdichte $B = 0{,}58\,\mathrm{T}$ wird in der Zeit $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$ die Fläche einer kreisförmigen Leiterschleife (Durchmesser $d = 10{,}5\,\mathrm{cm}$) halbiert. Berechnen Sie die induzierte Spannung, wenn das Magnetfeld
   a) senkrecht zur Fläche verläuft,
   b) mit der Fläche einen Winkel von 30^0 einschließt,
   c) parallel zur Fläche verläuft.
4) In einem homogenen magnetischen Feld der Flussdichte 0,2 T befindet sich senkrecht zu den Feldlinien eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius 4,5 cm und einem Widerstand von $0{,}32\,\Omega$. Die magnetische Flussdichte nimmt gleichmäßig in 3 ms auf Null ab. Welcher Strom fließt während dieses Vorganges durch die Schleife?
5) In einer Spule ($n = 2000$, $l = 3{,}1\,\mathrm{cm}$, $d = 4{,}8\,\mathrm{cm}$) wird die Flussdichte $B = 27\,\mathrm{mT}$ in 2 s gleichmäßig auf Null reduziert. Berechnen Sie die induzierte Spannung.
6) Ein Stabmagnet wird in eine Spule hineingeführt. Bestimmen Sie die Richtung der induzierten Spannung in Abhängigkeit von der Polung des Magneten und der Wicklungsrichtung der Spule.
7) Durch eine waagerechte Leiterschleife fällt ein Stabmagnet mit dem Nordpol zuerst. Beschreiben Sie qualitativ den Verlauf der induzierten Spannung. Wie wirkt der Induktionsstrom auf die Bewegung des Stabmagneten?
8) Ein kleiner Stabmagnet ($m = 50\,\mathrm{g}$) fällt einmal durch ein Glasrohr und einmal durch ein Kupferrohr. Beide Rohre haben den gleichen Innendurchmesser und die gleiche Länge $l = 1{,}6\,\mathrm{m}$. Für das Durchfallen des Glasrohres wird die Zeit $t_1 = 0{,}58\,\mathrm{s}$ benötigt. Für das Kupferrohr beträgt diese Zeit $t_2 = 1{,}33\,\mathrm{s}$. Der Stabmagnet startet am oberen Ende des Rohres aus der Ruhe.
   a) Erklären Sie das Zustandekommen der unterschiedlichen Zeiten.
   b) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung, die der Magnet im Kupferrohr erfährt.
   c) Bestimmen Sie die durchschnittliche, den freien Fall abbremsende Kraft im Kupferrohr.
   d) Vergleichen Sie die Endgeschwindigkeiten des Stabmagneten und erklären Sie den Unterschied aus energetischer Sicht.

Übungen (E11) — Lösungen

1) Auf die mit dem Stab bewegten Elektronen wirkt die Lorentzkraft. Da die Elektronen frei beweglich sind, folgen sie der Lorentzkraft und laden den Stab an dem entsprechenden Ende negativ auf. Die Richtung der Lorentzkraft ergibt sich aus der Dreifingerregel:
Daumen gegen die Bewegungsrichtung des Stabes (und mitbewegten Elektronen) nach oben,
Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes nach Norden,
Mittelfinger in Richtung der Lorentzkraft nach Westen:
das 'westliche' Ende des Stabes wird negativ aufgeladen.

2) Die induzierte Spannung ergibt sich aus dem Induktionsgesetz (hier noch in seiner vorläufigen Fassung für konstantes Magnetfeld B)

$$U_{\text{ind}} = nB\frac{\Delta A}{\Delta t}\,.$$

Dabei ist ΔA die vom Rotorblatt in der Zeit Δt überstrichene Fläche (senkrecht zum Magnetfeld). Mit der Frequenz f und der Umlaufzeit $T = \frac{1}{f}$ ergibt sich

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi r^2}{T} = \pi f r^2\,.$$

Insgesamt also

$$U_{\text{ind}} = B \cdot \pi f r^2 = 58\,\mu\text{T} \cdot \pi \cdot \frac{9}{\text{s}} \cdot 36\,\text{m}^2 = 59{,}04\,\text{mV}\,.$$

3) Die induzierte Spannung ist

$$U_{\text{ind}} = nB_{\text{n}} \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} = B\cos\alpha \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

wobei B_n die Normalkomponente von $\vec{B}$ bezüglich A ist, also die Komponente von $\vec{B}$ in Richtung einer Flächennormale von A (d. h. senkrecht zu A). Der Winkel α ist dabei der Winkel zwischen $\vec{B}$ und der Normalenrichtung von A.
Die Änderungsgeschwindigkeit der Querschnittsfläche ist

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A/2}{\Delta t} = \frac{\pi r^2}{2\Delta t} = \frac{\pi d^2}{8\Delta t}\,,$$

die induzierte Spannung also

$$U_{\text{ind}} = B_n\frac{\Delta A}{\Delta t} = B\cos\alpha\frac{\Delta A}{\Delta t} = 0{,}58\,\text{T} \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}105\,\text{m})^2}{8 \cdot 0{,}1\,\text{s}} \cdot \cos\alpha = 25{,}11\,\text{mV} \cdot \cos\alpha\,.$$

a) In diesem Fall ist $\alpha = 0$ und $U_{\text{ind}} = 25{,}11\,\text{mV}$.
b) Wenn der Winkel zwischen $\vec{B}$ und der Fläche 30^0 beträgt, so ist der Winkel zur Normalenrichtung $\alpha = 60^0$ und man erhält für die Spannung den halben Wert

$$U_{\text{ind}} = \cos 60^0 \cdot 25{,}11\,\text{mV} = 12{,}56\,\text{mV}\,.$$

c) In diesem Fall verschwindet die Normalkomponente B_n senkrecht zu A und damit auch die Spannung: $U_{\text{ind}} = 0$.

4) Die induzierte Spannung beträgt nach dem Induktionsgesetz ($n = 1$)

$$U_{\text{ind}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = A\frac{\Delta B}{\Delta t} = \pi(0,045\,\text{m})^2 \cdot \frac{0{,}2\,\text{T}}{3 \cdot 10^{-3}\,\text{s}} = 0{,}42\,\text{V}\,.$$

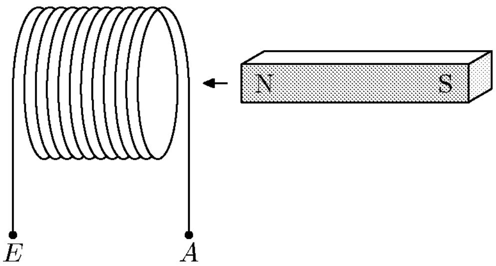
Aufgrund dieser Spannung fließt der Strom

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = \frac{0{,}42\,\text{V}}{0{,}32\,\Omega} = 1{,}33\,\text{A}\,.$$

5) Die induzierte Spannung beträgt nach dem Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = nA\frac{\Delta B}{\Delta t} = 2000 \cdot \pi(0,024\,\text{m})^2 \cdot \frac{27 \cdot 10^{-3}\,\text{T}}{2\,\text{s}} = 49\,\text{mV}\,.$$

6) Der Stabmagnet bewege sich mit dem Nordpol voran in die Spule hinein. A bezeichne den Anfang, E das Ende des Spulendrahtes. Die Wicklungsrichtung der Spule sei in Bewegungsrichtung gesehen gegen den Uhrzeigersinn (siehe Skizze).



Wenn sich der Nordpol der Spule nähert, steigt der Betrag des magnetischen Flusses und an den Enden der Spule wird eine Spannung vom *Betrag* $U_{\text{ind}} = n\dot{\Phi}$ induziert. Die Orientierung der Spannung bestimmen wir zur Übung auf zwei Arten,
i) mit der Lenzschen Regel, und
ii) mit Vorzeichenbestimmung von Fluss und Spannung:
i) Der Induktionsstrom in der Spule wirkt gemäß Lenzscher Regel der Ursache der Induktion, also der Annäherung des Stabmagneten entgegen. Daher ist der Induktionsstrom so gerichtet, dass das dadurch entstehende Magnetfeld der Spule den Stabmagneten *abstößt.* Die Spule muss also auf der rechten Seite seinen Nordpol haben. Nach der Rechte-Hand-Regel (Daumen in Feldrichtung nach rechts, gekrümmte Finger gegen den Uhrzeiger in Stromrichtung) muss der Induktionsstrom gegen den Uhrzeigersinn von A nach E fließen: Bei E entsteht dadurch der $+$- und bei A der $-$-Pol.
ii) Wir orientieren die Querschnittsfläche der Spule durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ in Bewegungsrichtung. Da sich der Nordpol des Stabmagneten nähert, ist auch die Flussdichte des Stabmagneten in Bewegungsrichtung orientiert und der Fluss Φ durch die Spule positiv. Bei Annäherung des Stabmagneten wächst daher der Fluss, $\dot{\Phi} > 0$. Damit ist die induzierte Spannung $U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi}$ *negativ.*
Durch die Orientierung der Querschittsfläche ist auch die Randkurve der Spule orientiert, und zwar gemäß der Rechte-Hand-Regel im *Uhrzeigersinn* (Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächenorientierung nach links, gekrümmte Finger in

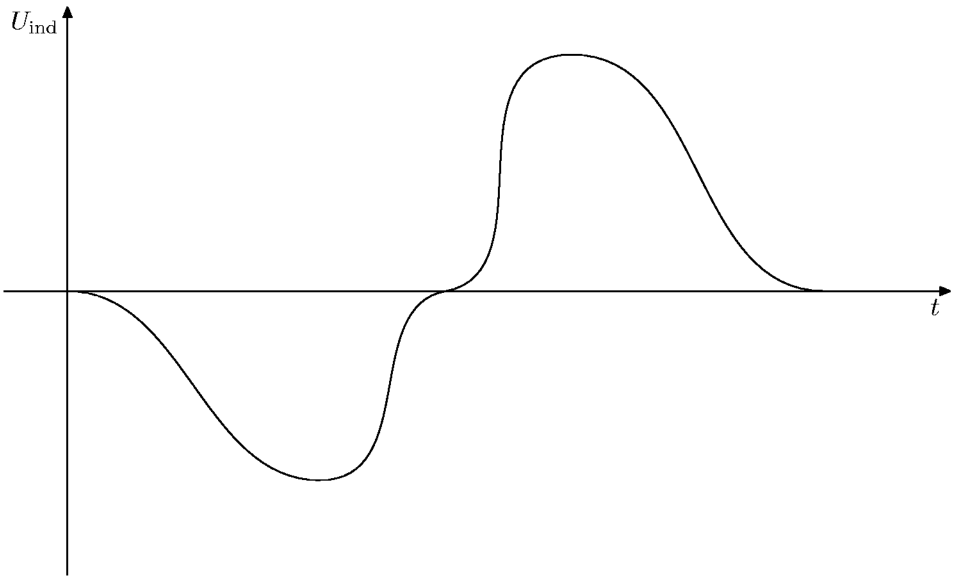
Uhrzeigerrichtung geben die Randorientierung an). Die Messrichtung der induzierten Spannung ist also im Uhrzeigersinn von E nach A. Da U_{ind} negativ ist, entsteht bei A ein negativer Ladungsüberschuss.

Wir erhalten also in beiden Fällen dieselbe physikalische Antwort: E wird zum $+$- und A zum $-$-Pol der Induktionsspannung.

7) Die erste Phase der Bewegung ist identisch mit den in der vorangehenden Aufgabe beschriebenen Vorgängen. Wie dort wollen wir auch hier die induzierte Spannung im Uhrzeigersinn messen, $U_{\text{ind}} < 0$. Allerdings ist die Flussänderungsrate $\dot{\Phi}$ wegen der zunehmenden Geschwindigkeit (freier Fall!) nicht konstant, U_{ind} wächst daher betraglich.

Während der Stabmagnet die Leiterschleife passiert, ist das Magnetfeld nahezu homogen, so dass die *Änderung*srate des Flusses und die induzierte Spannung (nahezu) 0 ist. Wenn der Südpol die Leiterschleife passiert hat, sinken Flussdichte und Fluss, $\dot{\Phi} < 0$, $U_{\text{ind}} > 0$ und der Induktionsstrom kehrt die Richtung um. Nun wird der sich *entfernende* Südpol *angezogen,* der Stab wird weiter gebremst.

Nachfolgend eine qualitative Skizze des Verlaufs der Induktionsspannung:



8) a) Wir lassen die Luftreibung außer Acht, da sie beide Fälle gleichermaßen beeinflusst. Wir fixieren einen Querschnitt durch das Kupferrohr. Wenn der Magnet sich der Position nähert, ändert sich der magnetische Fluss durch den Kupferring und es wird in ihm eine Spannung und dadurch ein Strom induziert. Dieser Strom erzeugt nun seinerseits ein Magnetfeld. Nach der Lenzschen Regel wirkt dieses Magnetfeld der Ursache der Induktion (der Bewegung des Magneten und damit der Änderung des Flusses) entgegen, d. h. der Fall des Magneten wird gebremst! Damit ist die Fallzeit im Kupferrohr (deutlich) größer als im Glasrohr.

b) Gefragt ist nach der *durchschnittlichen* Beschleunigung, d. h. wir berechnen die Beschleunigung unter der Annahme, dass sie konstant ist. Dann gilt nach den Bewegungsgesetzen

$$s = \frac{1}{2}at^2 \iff a = \frac{2s}{t^2}\,.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\text{Glasrohr:}\quad a_1 &= \frac{2\cdot 1{,}6\,\mathrm{m}}{(0{,}58\,\mathrm{s})^2} = 9{,}51\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\\ \text{Kupferrohr:}\quad a_2 &= \frac{2\cdot 1{,}6\,\mathrm{m}}{(1{,}33\,\mathrm{s})^2} = 1{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.\end{aligned}$$

Der Wert a_1 ist etwas kleiner als g, Ursache ist die Luftreibung.
c) Für die Endgeschwindigkeiten ergibt sich $v = at = \frac{2s}{t^2}\cdot t = \frac{2s}{t}$, also

$$\begin{aligned}v_1 = a_1 t_1 &= \frac{2s}{t_1} = \frac{2\cdot 1{,}6\,\mathrm{m}}{0{,}58\,\mathrm{s}} = 5{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\\ v_2 = a_2 t_2 &= \frac{2s}{t_2} = \frac{2\cdot 1{,}6\,\mathrm{m}}{1{,}33\,\mathrm{s}} = 2{,}41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.\end{aligned}$$

Die durchschnittliche abbremsende Kraft im Kupferrohr ist daher

$$F = m(a_1 - a_2) = 0{,}05\,\mathrm{kg}\cdot(9{,}51 - 1{,}81)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}39\,\mathrm{N}\,.$$

d) Die potentielle Energie des Magneten in der Höhe 1,6 m wird beim Fall umgewandelt in kinetische Energie, wobei in beiden Fällen durch Luftreibung mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird. Außerdem wird beim Fall durch das Kupferrohr zusätzlich Energie für den Induktionsstrom benötigt. Diese geht letztlich auch als Wärmeenergie verloren:

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{pot}} &= mgh = 0{,}05\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 1{,}6\,\mathrm{m} = 0{,}78\,\mathrm{J}\,,\\ W_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}05\,\mathrm{kg}\cdot(5{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 0{,}76\,\mathrm{J}\,,\\ W_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}05\,\mathrm{kg}\cdot(2{,}41\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 0{,}14\,\mathrm{J}\,.\end{aligned}$$

Damit betragen die Energieverluste

$$\begin{aligned}\text{Luftreibung:}\quad & W_{\mathrm{pot}} - W_1 = 0{,}78\,\mathrm{J} - 0{,}76\,\mathrm{J} = 0{,}02\,\mathrm{J}\,,\\ \text{Induktion:}\quad & W_1 - W_2 = 0{,}76\,\mathrm{J} - 0{,}14\,\mathrm{J} = 0{,}62\,\mathrm{J}\,.\end{aligned}$$