Übungen (E12)

1) a) Erläutern Sie kurz das Phänomen der Selbstinduktion und die Bedeutung der Induktivität einer Spule dabei. Welche grundlegende Gesetzmäßigkeit gilt hier?
   b) Eine Spule mit 10 000 Windungen ist 40 cm lang und hat einen Durchmesser von 10 cm. Berechnen Sie ihre Induktivität im Vakuum.
   c) In die Spule wird ein Eisenkern der Permeabilität $\mu_r = 2000$ eingeführt und in 3 s die Stromstärke von 0 auf 5 A gesteigert. Wie groß ist die induzierte Spannung?
2) In einer Spule mit 500 Windungen und der Länge $l = 70\,\mathrm{cm}$ sowie dem Durchmesser $d = 12\,\mathrm{cm}$ wird die Stromstärke in der Zeit $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$ von $I_1 = 1\,\mathrm{A}$ auf $I_2 = 8\,\mathrm{A}$ gesteigert. Berechnen Sie die Induktivität der Spule und die Selbstinduktionsspannung.
3) Eine Spule hat $n = 700$ Windungen, die Länge $l = 30\,\mathrm{cm}$ und den Durchmesser $d = 4\,\mathrm{cm}$. In der Spule befindet sich ein ferromagnetischer Kern mit der Permeabilitätszahl $\mu_r = 200$. Es fließt ein Strom von 5 A. Wie groß ist die Induktionsspannung beim Ausschalten, wenn die Spannung in 200 ms gleichmäßig auf 0 abfällt?
4) Eine Spule hat eine Querschnittsfläche $A = 20\,\mathrm{cm}^2$, 600 Windungen und die Länge 40 cm. Mit einem Eisenkern beträgt die Induktivität 2 H. Wie groß ist die Permeabilitätszahl?
5) Die Spule aus Aufgabe 1b) hat einen Widerstand von $3\,\Omega$ und ist zunächst an eine Spannungsquelle von 30 V angeschlossen. Die Verbindung zur Spannungsquelle wird nun unterbrochen. Bestimmen Sie die Stromstärken des Abklingstromes in der ersten Sekunde danach in Abständen von 0,2 s. Skizzieren Sie auf der Basis dieser Werte den graphischen Verlauf der Stromstärkekurve auf Millimeterpapier.
   b) Nach welcher Zeit ist die Stromstärke auf 1% des Ausgangswertes gesunken?
6) Ein Kondensator der Kapazität C entlädt sich über einen Widerstand R.
   a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ an dem Kondensator auf und folgern Sie:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} .$$

   b) Die Spannung am Kondensator fällt in 0,5 s von 100 V auf 10 V. Der Widerstand betrage $R = 300\,\mathrm{k\Omega}$. Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?
   c) Wann ist die Spannung auf 5 V, wann auf 1 V abgesunken?

7) (Bei ausreichenden Kenntnissen der Integralrechnung.)
Eine Spule mit der Induktivität L und dem Widerstand R ist an eine Spannungsquelle angeschlossen und wird von einem Strom der Stärke I_0 durchflossen.
a) Trennt man die Spule von der Spannungsquelle, so fließt weiter Strom und es wird Energie frei. Wodurch wird dieser Strom verursacht? Woher stammt die dafür nötige Energie? Was folgern Sie daraus für das magnetische Feld (in Analogie zum elektrischen Feld)?
b) Wie groß ist die Leistung des Ausschaltstromes zum Zeitpunkt t? Beschreiben Sie damit die Gesamtenergie des Ausschaltstromes als ein Integral.
[Zur Kontrolle: $W = RI_0^2 \int\limits_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\,dt$.]
c) Berechnen Sie die gesamte Energie des Ausschaltstromes und folgern Sie daraus für den Energieinhalt des Magnetfeldes einer vom Strom der Stärke I durchflossenen Spule:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}LI^2.}$$

d) (Bei guter Beherrschung der Substitutionsregel.) Alternativ kann man dieses Ergebnis auch *ohne* genaue Kenntnis des Verlaufs des Ausschaltstromes herleiten, wenn man von

$$W = \int_0^\infty U_{\mathrm{ind}} I\,dt$$

ausgeht und die Gesetzmäßigkeit der Selbstinduktion verwendet.

Übungen (E12) — Lösungen

1) a) Ändert sich die Stromstärke in einer Spule, so wird an ihren Enden eine Spannung U_{ind} induziert. Diese wirkt der Ursache entgegen, so dass bei *abnehmender* Stromstärke, die induzierte Spannung den Strom verstärkt und damit die gleiche Orientierung hat wie die externe Spannungsquelle, während bei zunehmender Stromstärke, die induzierte Spannung den Strom abschwächt und daher der äußeren Spannungsquelle entgegen orientiert ist.
Die grundlegende Gesetzmäßigkeit besagt, dass die induzierte Spannung der Änderungsrate der Stromstärke negativ proportional ist:

$$U_{\text{ind}} = -L\dot{I}\,.$$

Dabei ist L die *Induktivität* der Spule. Ihre Einheit ist das *Henry* $1\,\mathrm{H} = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$. Die Induktivität berechnet sich aus den Daten der Spule und hängt vom Material im Innern der Spule ab (siehe Skript):

$$L = \mu_0\mu_r\frac{n^2A}{l}\,.$$

b) Gemäß dieser Formel ergibt sich (mit $\mu_r = 1$ im Vakuum)

$$L = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{10000^2\cdot\pi\cdot(0{,}05\,\mathrm{m})^2}{0{,}4\,\mathrm{m}} = 2{,}47\,\mathrm{H}\,.$$

c) Durch den Eisenkern wird die Induktivität der Spule erhöht auf

$$L_1 = \mu_r\cdot L = 2000\cdot 2{,}47\,\mathrm{H} = 4948{,}01\,\mathrm{H}\,.$$

Gemäß dem Induktionsgesetz gilt für die induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = -L_1\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = -4948{,}01\,\mathrm{H}\cdot\frac{5\,\mathrm{A}}{3\,\mathrm{s}} = -8246{,}68\,\mathrm{V}\,.$$

2) Die Induktivität (im Vakuum) berechnet sich zu

$$L = \mu_0\frac{n^2A}{l} = 1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{500^2\cdot\pi\cdot(0{,}06\,\mathrm{m})^2}{0{,}7\,\mathrm{m}} = 5{,}09\,\mathrm{mH}\,.$$

Damit erhält man die Selbstinduktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = -5{,}09\,\mathrm{mH}\cdot\frac{7\,\mathrm{A}}{2\,\mathrm{s}} = -17{,}81\,\mathrm{mV}\,.$$

3) Wie in der vorangehenden Aufgabe erhalten wir (bei *gleichmäßiger* Abnahme des Stroms auf 0)

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0\mu_r n^2\frac{\pi r^2}{l}\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} = -1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\cdot 200\cdot 700^2\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}02^2\,\mathrm{m}^2}{0{,}3\,\mathrm{m}}\cdot\frac{-5\,\mathrm{A}}{0{,}2\,\mathrm{s}} = 12{,}93\,\mathrm{V}\,.$$

4) Es gilt

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 \cdot \frac{A}{l} \iff \mu_r = \frac{L \cdot l}{\mu_0 n^2 A} = \frac{2\,\mathrm{H} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m}}{1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}} \cdot 600^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 881{,}83\,.$$

5) a) Für den Ausschaltstrom gilt

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

Mit den konkreten Werten ergibt sich

$$I = \frac{30\,\mathrm{V}}{3\,\Omega} \cdot e^{-\frac{3\,\Omega}{2{,}47\,\mathrm{H}} \cdot t} = 10\,\mathrm{A} \cdot e^{-1{,}21 \cdot \frac{t}{\mathrm{s}}}\,.$$

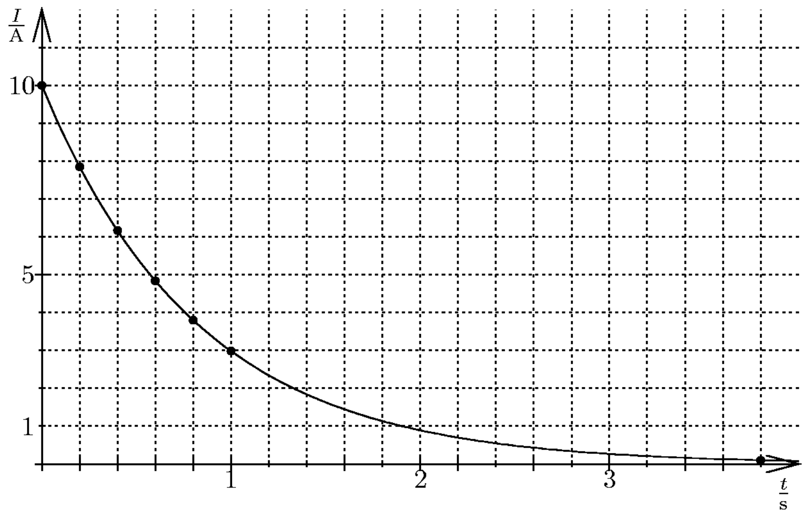
Dies ergibt folgende Werte I_k für die Zeitpunkte $t_k = k \cdot 0{,}2\,\mathrm{s}$

$$I_k = 10 \cdot e^{-1{,}21 \cdot 0{,}2 \cdot k} = 10 \cdot e^{-0{,}24k} = 10 \cdot 0{,}785^k\,.$$

Die Stromstärken I_k bilden also eine absteigende geometrische Folge mit dem Anfangsglied $I_0 = 10\,\mathrm{A}$ und dem Quotienten $q = 0{,}785$. Die Stromstärke sinkt also in jeweils 0,2 s auf 78,5% ab.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\frac{I}{\mathrm{A}}$	10,0	7,85	6,16	4,83	3,79	2,97

Dies ergibt folgende Skizze:



b) Gesucht ist die Zeit t mit $I = \frac{I_0}{100}$ bzw.

$$0{,}01 = e^{-\frac{R}{L}t} \iff t = -\ln 0{,}01 \cdot \frac{L}{R} = \ln 100 \cdot \frac{2{,}47\,\mathrm{H}}{3\,\Omega} = 3{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Nach 3,8 s ist die Stromstärke auf 1%, also 0,1 A abgesunken. Dieser Punkt ist in obiger Skizze markiert.

6) a) Siehe Skript. Hier eine Kurzfassung. Ein Kondensator der Kapazität C wird über einen Widerstand R kurzgeschlossen und entlädt sich. Wir bezeichnen mit Q die (zeitlich veränderliche) Ladung auf der Platte, die anfänglich positiv ist: $Q_0 > 0$. Weiter sei I der Strom, wobei die Messrichtung so gewählt ist, dass $I_0 > 0$ ist. Der Strom fließt also zunächst von der positiven Platte weg, so dass die auf der Platte verbleibende Ladung Q sinkt: $\dot{Q}_0 < 0$. Da die Stromstärke die Änderungsrate der Ladung ist, erhält man aufgrund dieser Vorzeichenüberlegung: $I = -\dot{Q}$.
Wir benutzen nun den Zusammenhang zwischen U und I bzw. Q und erhalten:

$$U = RI\,,\ U = \frac{Q}{C} \implies U = RI = -R\dot{Q} = -RC\dot{U}\,.$$

Die Änderungsrate $\dot{U}$ der Spannung ist also proportional zum Wert U:

$$\dot{U} = -\frac{1}{RC}U\,.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung muss U die behauptete Form haben:

$$U = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\,.$$

b) Aufgrund der Angaben muss gelten

$$10\,\mathrm{V} = 100\,\mathrm{V} \cdot e^{-\frac{1}{RC}\cdot 0{,}5\,\mathrm{s}} \iff \ln 0{,}1 = -\frac{1}{RC} \cdot 0{,}5\,\mathrm{s}$$
$$\iff C = \frac{0{,}5\,\mathrm{s}}{300 \cdot 10^3\,\Omega \cdot \ln 10} = 0{,}72\,\mu\mathrm{F}\,.$$

c) Es gilt für einen vorgegebenen Stromstärkewert

$$U = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \iff t = RC \ln\frac{U_0}{U}\,,$$

also für $I = 5\,\mathrm{V}$:

$$t_5 = 300 \cdot 10^3 \cdot 0{,}72 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\frac{100}{5}\,\mathrm{s} = 0{,}65\,\mathrm{s}\,.$$

Den Wert für 1 V kann man zwar genauso berechnen, aber ein Blick auf die Ausgangsdaten zeigt: In 0,5 s hat sich die Spannung auf 10 V, also 10% des Ausgangswertes reduziert. Da bei einer Exponentialfunktion sich die Werte in gleichen Zeitabschnitten immer mit demselben *Faktor* multiplizieren: ($e^{t+\Delta t} = ce^t$ mit $c = e^{\Delta t}$), sinkt die Spannung in weiteren 0,5 s s erneut auf 10%, d. h. 1 V. Die Reduktion auf 1 V erfolgt also in genau 1 s.

7) a) Die (Selbst-)Induktionsspannung U_{ind} hält den Strom aufrecht, und die Induktionsspannung wird ihrerseits verursacht durch die Änderung, genauer den Abbau des Magnetfeldes. Man kann also das Magnetfeld als Energiequelle ansehen. Dies ist analog zum elektrischen Feld. So wie das elektrische Feld Träger von Energie ist (siehe Skript, 4.c), ist auch im Magnetfeld Energie gespeichert. Beim Einschalten des Stromes steigt dieser langsam an, weil ein Teil der zugeführten Energie für den Aufbau des Magnetfeldes benötigt wird und darin gespeichert ist; beim Abbau des Magnetfeldes wird diese Energie wieder frei und verursacht den Ausschaltstrom.

b) Die elektrische Leistung ist $P = UI = RI^2$. Bei konstanter Leistung P ist die geleistete Arbeit $W = P \cdot \Delta t$, wenn jedoch die Leistung zeitlich veränderlich ist (wie in diesem Falle), muss man die Energie für viele kleine Zeitintervalle ermitteln und aufaddieren, man muss ein Integral bestimmen:

$$W = \int_0^\infty RI^2\,dt = \int_0^\infty RI_0^2 \cdot e^{-2\frac{R}{L}t}\,dt\,.$$

Die konstante Größe $RI_0^2 = P_0$ (momentane Leistung im Ausschaltzeitpunkt) kann man vor das Integral ziehen und erhält die behauptete Formel.
c) Wir berechnen das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt\,.$$

Mittels linearer Substitution erhalten wir als Stammfunktion des Integranden

$$F(t) = e^{-\frac{2R}{L}t} \cdot (-\frac{L}{2R})$$

(Kontrolle durch Ableiten mittels Kettenregel!) und daher

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{L}{2R}e^{-\frac{L}{2R}t}\Big]_0^b = -\frac{L}{2R}\cdot\lim_{b\to\infty}(\underbrace{e^{-\frac{L}{2R}b}}_{\to 0} - 1) = \frac{L}{2R}\,.$$

Also

$$W = RI_0^2 \cdot \frac{L}{2R} = \frac{1}{2}LI_0^2\,.$$

Beachten Sie die Analogie zur Energieformel für das elektrische Feld eines Kondensators: $W = \frac{1}{2}CU^2$.
d) Wir starten wieder mit der Leistung $P = UI$. Während des Ausschaltvorganges ist $U = U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$ und daher $P = -L\dot{I}I$. Damit ist die Energie

$$W = \int_0^\infty (-L\dot{I}I)\,dt\,.$$

Eine Stammfunktion für den Integranden ist (gemäß Substitutionsregel) $-\frac{L}{2}I^2$ (überprüfen durch Ableiten mittels Kettenregel!), und folglich

$$W = \int_0^\infty (-L\dot{I}I)\,dt = \lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{L}{2}I^2\Big]_0^b = -\frac{L}{2}\lim_{b\to\infty}(\underbrace{I^2(b)}_{\to 0} - I^2(0)) = \frac{1}{2}LI_0^2\,.$$