

# **Einführung in die Elektrizitätslehre**

für Studierende des Studienkollegs  
an der RWTH Aachen

Unterrichtsbegleitende Skripten sowie  
Übungen mit ausführlichen Lösungen

**Norbert Klingen**

Aachen 2006

# Inhalt

## I. Elektrizität

<b>1. Grundlagen</b>	<b>1</b>
a. Ladung als elektrische Grundgröße.	1
b. Ladungstrennung und Spannung.	1
c. Elektrischer Strom.	2
d. Das Ohmsche Gesetz und der Widerstand.	2
e. Der spezifische Widerstand.	4
f. Leistung.	4
<b>2. Elektrische Schaltungen.</b>	<b>5</b>
a. Reihen- und Parallelschaltung.	5
b. Einfache Schaltungen.	6
c. Kirchhoffs Maschen- und Knotenregeln.	7
d. Die Wheatstone-Brücke.	9
e. Mehrere Spannungsquellen und der Überlagerungssatz.	9
f. Nachtrag: Die reale Spannungsquelle.	10

## II. Ladung und elektrisches Feld

<b>3. Das elektrische Feld</b>	<b>11</b>
a. Der Feldbegriff.	11
b. Die Feldstärke.	11
c. Flächenladungsdichte und elektrische Feldgleichung.	12
d. Elektrisches Feld und Spannung.	12
<b>4. Kondensatoren.</b>	<b>13</b>
a. Die Kapazität.	13
b. Energie.	14
c. Die Energiedichte des elektrischen Feldes.	15
d. Das radialsymmetrische Feld.	15
<b>5. Bewegte Ladung im elektrischen Feld.</b>	<b>16</b>
a. Die Braunsche Röhre.	16
b. Die Beschleunigung der Elektronen.	16
c. Die Bahn des Elektronenstrahls.	17
d. Das Oszilloskop.	18

## III. Magnetismus und Induktion

<b>6. Grundlagen des Magnetismus.</b>	<b>19</b>
a. Magnete, ferromagnetische Stoffe, Pole	19
b. Ein erstes einfaches Modell.	19
c. Das magnetische Feld.	20
<b>7. Elektrizität und Magnetismus.</b>	<b>20</b>
a. Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.	20
b. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule.	21
c. Anwendungen.	22
<b>8. Magnetische Feldstärke und die magnetische Feldgleichung.</b>	<b>22</b>
a. Die magnetische Flussdichte.	22
b. Die magnetische Feldgleichung.	23
<b>9. Bewegte Ladung im Magnetfeld.</b>	<b>24</b>
a. Die Lorentzkraft.	24

b. Lorentzkraft und Kreisbewegung. ....	25
c. Geschwindigkeitsfilter und Massenbestimmung. ....	27
<b>10. Elektromagnetische Induktion. ....</b>	<b>28</b>
a. Bewegung induziert Spannung. ....	28
b. Induktion ohne Bewegung, der magnetische Fluss. ....	30
c. Das allgemeine Induktionsgesetz. ....	31
d. Die Lenzsche Regel. ....	33
d. Selbstinduktion. ....	34
e. Der Generator, Wechselspannung. ....	35
f. Transformator. ....	36
<b>11. Differentialgleichungen in der Physik ....</b>	<b>37</b>
a. Bewegungsgleichungen und Differentialrechnung. ....	37
b. Dynamische Charakterisierung von Bewegungen. ....	38
c. Ausschaltvorgang einer Spule. ....	40
d. Der Einschaltvorgang. ....	41
e. Die Differentialgleichung $f' = kf$ . ....	42
f. Entladung eines Kondensators. ....	44
g. Der Schwingkreis. ....	44
h. Die Schwingungsdifferentialgleichung. ....	47
i. Die Thomsonsche Schwingungsformel. ....	50
<b>Epilog: Die Grenzen der klassischen Physik ....</b>	<b>51</b>
Vom Lichtelektrischen Effekt zur Quantenphysik ....	51

# I. Elektrizität

## 1. Grundlagen

**a. Ladung als elektrische Grundgröße.** Grundlage der Elektrizität ist die sog. elektrische *Ladung*. Diese gibt es in zwei Ausprägungen, die man *positiv* bzw. *negativ* nennt. Ladungen üben Kräfte aufeinander aus: Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Träger der Ladung sind die *Elektronen* (negativ) in der Atomhülle und die *Protonen* (positiv) im Atomkern. Da beide Elementarteilchen gleich große, aber entgegengesetzte Ladung tragen und in Atomen immer in gleicher Anzahl auftreten, heben sich ihre Wirkungen nach außen auf, so dass man Ladung makroskopisch zunächst nicht beobachten kann. Atome sind nach außen elektrisch *neutral*. Ladung kann man *nicht erzeugen*; sie ist in jeglicher Substanz vorhanden. Um sie beobachten zu können, muss man sie *trennen*. Dies kann schon durch Reibung geschehen, besonders effektiv mit einem sog. *Bandgenerator*, wie wir ihn im Unterricht benutzt haben.

Wir wollen hier die Ladung als eine weitere physikalische Grundgröße betrachten, obwohl man im internationalen Einheitensystem aus Gründen der genaueren Messbarkeit die Stromstärke zugrundelegt. Die Ladung ist sicher der fundamentalere Begriff, da ihre Natur nicht weiter aufgeklärt wird; sie ist untrennbar mit den entsprechenden Elementarteilchen verknüpft.

Als Formelzeichen wird für Ladung  $Q$  oder  $q$  benutzt. Als Einheit für die Ladung wäre die Festlegung der (gleich großen) Ladung der Elementarteilchen, die sog. *Elementarladung*  $1e$  sinnvoll. Diese ist sehr klein und daher nicht unmittelbar messbar. Man legt daher die folgende größere Einheit als Basiseinheit der Ladung fest:

Basiseinheit der Ladung:  $1\text{ C}$  (Coulomb)

In dieser Einheit hat dann die Elementarladung den Wert:

Elementarladung:  $1e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ .

**b. Ladungstrennung und Spannung.** Um Ladung beobachten zu können, muss man die verschiedenartigen Ladungen trennen. Da diese sich gegenseitig anziehen, ist für die Ladungstrennung eine *Kraft* erforderlich. Wenn diese Kraft bei der Ladungstrennung über eine gewisse Wegstrecke angewendet wird, benötigt man Energie:

Ladungstrennung erfordert Energie.

Diese Energie  $W$  ist proportional zur Ladung  $Q$ , die abgetrennt wird. Das Verhältnis beider Größen nennt man die elektrische *Spannung*  $U$ :

$$\text{Spannung } U = \frac{W}{Q}, \quad \text{Basiseinheit Volt: } 1\text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Dabei bezieht sich die Angabe einer Spannung immer auf *zwei* Punkte, zwischen denen diese Spannung herrscht. Die Spannung gibt an, wieviel Energie benötigt wird, um eine Ladungsmenge  $Q$  von dem einen Punkt zum anderen zu bringen, bzw. wieviel Energie frei wird, wenn eine Ladungsmenge  $Q$  vom einen Punkt zu dem anderen fließt. Zwischen 2 Punkten herrscht also eine Spannung von  $1\text{ V}$ , wenn für den Transport von  $1\text{ C}$  Ladung eine Energie von  $1\text{ J}$  benötigt wird. [Wir erinnern uns an die Definition der Energieeinheit  $1\text{ J}$  in der Mechanik:  $1\text{ J} = 1\text{ Nm}$  ist die Arbeit, die man verrichtet, wenn eine Kraft von  $1\text{ N}$  über eine Wegstrecke von  $1\text{ m}$  wirkt.]

Man kann die Spannung mit dem folgenden mechanischen Modell veranschaulichen. Pumpt man Wasser von einem Niveau auf ein höheres, so benötigt man dafür Energie. Diese Energie ist zunächst von der Wassermenge (genauer -masse) abhängig. Das Verhältnis von notwendiger Energie zur Wassermasse ist ein Maß dafür, wieviel Energie in einem  $\text{kg}$  Wasser in erhöhter Lage

enthalten ist bzw. wieviel Energie frei wird, wenn man 1 kg Wasser wieder herunterfließen lässt, etwa durch eine Turbine. Dieses Verhältnis ist ein Analogon<sup>1)</sup> zur Spannung. Im mechanischen Modell ergibt sich dafür

$$\frac{W}{m} = \frac{mgh}{m} = gh$$

mit der Höhe  $h$  und dem Ortsfaktor  $g$ . Im mechanischen Modell ist also die Höhe  $h$ , aber auch der Ortsfaktor  $g$  und damit die Stärke der Gravitation für die ‘Spannung’ bestimmend.

**c. Elektrischer Strom.** Unter elektrischem Strom versteht man *bewegte* elektrische Ladung. Wir betrachten zunächst nur Strom in Leitern.<sup>2)</sup> Dies sind Drähte aus Metall, die den Strom gut leiten. Ursache dafür ist, dass in Metallen die äußeren Elektronen der Atome *frei beweglich* sind. Im Gegensatz zu den Leitern bezeichnet man Materialien wie Holz, Keramik, Porzellan, gewisse Kunststoffe, die den Strom nicht oder schlecht leiten, als *Nichtleiter* oder *Isolatoren*.

Als Maß für die Stärke eines elektrischen Stromes definieren wir die *Stromstärke*  $I$  als das Verhältnis von durch den Leiterquerschnitt fließender Ladung zur dafür benötigten Zeit:

$\text{Stromstärke } I = \frac{Q}{t}, \quad \text{Basiseinheit Ampère: } 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$
---

Durch einen Leiterquerschnitt fließt also ein Strom der Stärke 1 A, wenn in einer Sekunde eine Ladung von 1 C hindurchfließt.

Wir wollen hier zunächst nur den sog. *Gleichstrom* betrachten, bei dem die Fließrichtung unverändert ist. Im Gegensatz dazu ändert sich beim *Wechselstrom*, mit dem wir es im täglichen Leben zu tun haben, die Bewegungsrichtung ständig (bei der üblichen Frequenz von 50 Hz 100-mal pro Sekunde).

Wie wir beim Bandgenerator gesehen haben, sind hohe Spannungen allein für den Menschen noch nicht gefährlich. Entscheidend ist die Ladungsmenge bzw. der dann fließende Strom, der eine Gefahr für den Menschen bedeutet. Auch hohe Stromstärken in Leitern können gefährlich werden: Bei zu großer Stromstärke erhitzen sich Leiter und können schließlich Brände auslösen. Um dies zu verhindern benötigt man *Sicherungen*. Der naheliegendste Typ sind die *Schmelzdrahtsicherungen*, bei denen in einem isolierenden Keramikkörper ein Draht mit genau festgelegtem Querschnitt verläuft. Diese Sicherung wird so in den Stromkreis eingesetzt, dass sämtlicher Strom hindurchfließt. Wird der Strom zu stark, so schmilzt der Draht in der Sicherung, bevor in den anderen Leitungen des Hauses eine zu starke Hitze gefährlich wird. Ist eine solche Sicherung ‘durchgebrannt’, muss sie ersetzt werden. In der Praxis benutzt man heute Sicherungsautomaten, die auf anderen Wirkungen des Stromes beruhen (magnetische Wirkungen, siehe später).

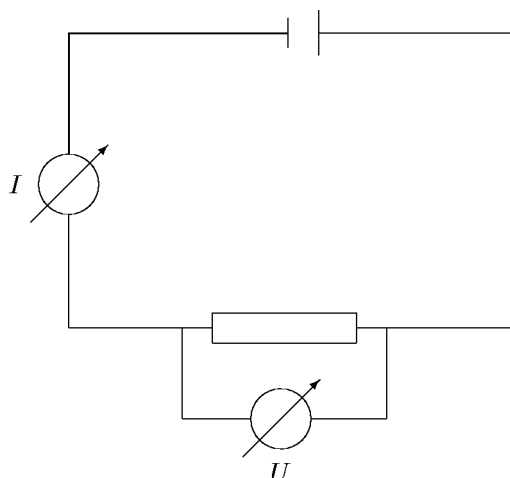
**d. Das Ohmsche Gesetz und der Widerstand.** Um einen Strom auszulösen, benötigt man eine Spannungsquelle. An dieser wird getrennte Ladung bereitgestellt. Schließt man nun daran einen *Verbraucher* (elektrischer Heizofen, Elektromotor o.ä.) an, so fließt ein Strom. Wovon hängt die Stromstärke ab?

Dazu haben wir einen Schiebewiderstand an die Spannungsquelle angeschlossen und die entstehende Stromstärke sowie die Spannung an den Enden des Schiebewiderstandes gemessen. Dazu benötigt man *Messgeräte*. Über deren Aufbau und Wirkungsweise werden wir zu einem späteren Zeitpunkt sprechen. Diese Multifunktionsgeräte können sowohl zur Stromstärken- als auch zur Spannungsmessung eingesetzt werden. Mit Hilfe von Schaltern kann man wählen, ob Gleich- oder Wechselstrom gemessen werden soll, ob Stromstärke oder Spannung gemessen werden soll, und welcher Messbereich gewünscht ist. Das allein genügt jedoch nicht, man muss

<sup>1)</sup> Analogon, das, grch., ähnlicher, entsprechender Fall

<sup>2)</sup> Unterscheiden Sie in der deutschen Sprache die folgenden beiden Worte: *die* Leiter, mit der man auf das Dach eines Hauses steigen kann; *der* Leiter = Material, in dem Strom (leicht) fließen kann.

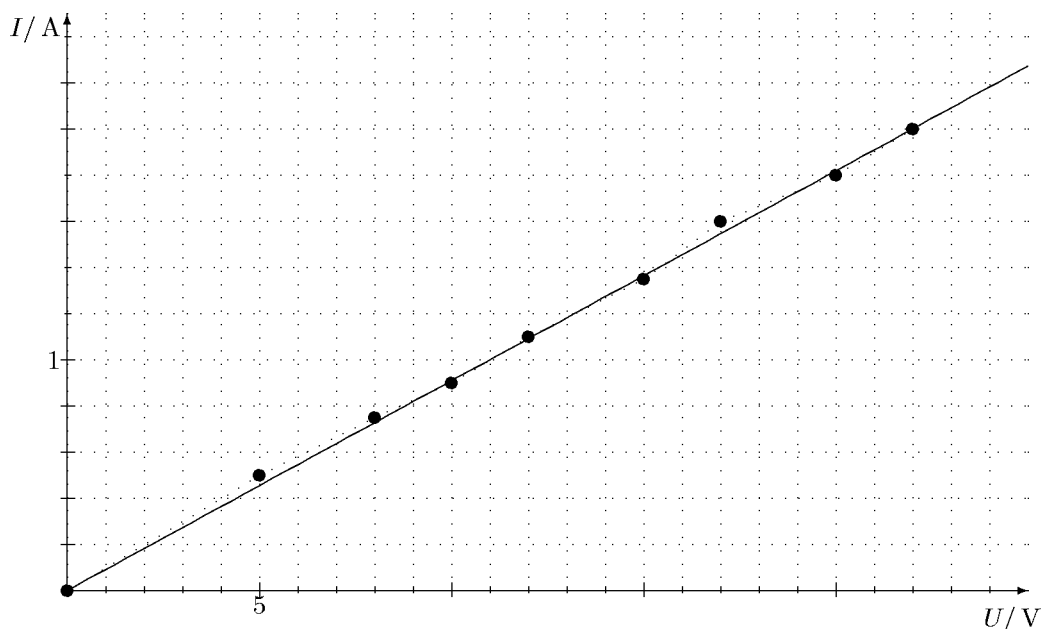
die Geräte auch korrekt in den Stromkreis einbauen. Will man *an einer Stelle* des Stromkreises die *Stromstärke* messen, muss man den Stromkreis an dieser Stelle unterbrechen und das Gerät dazwischen (in *Reihe*) schalten. Will man jedoch *zwischen zwei Stellen* des Stromkreises die *Spannung* messen, muss man die beiden Pole des Messgerätes an diese beiden Stellen anschließen, ohne den Stromkreis ansonsten zu verändern (*parallel* schalten).



Bei der skizzierten Schaltung misst man die Stärke des Stromes *I durch* den Verbraucher und die Spannung zwischen den *Enden* des Verbrauchers (hier als Rechteck symbolisiert). Dabei haben Studierende eines früheren Kurses z. B. folgende Messreihe erhalten:

$U/V$	5	8	10	12	15	17	20	22
$I/A$	0,5	0,75	0,9	1,1	1,35	1,6	1,8	2

Die graphische Darstellung der Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung (die sog. *Kennlinie* des Verbrauchers) ergibt ungefähr eine Ursprungsgerade, so dass man Proportionalität



vermuten kann. Wir berechnen für alle Messpunkte das Verhältnis beider Größen:

$U/V$	5	8	10	12	15	17	20	22
$I/A$	0,5	0,75	0,9	1,1	1,35	1,6	1,8	2
$\frac{U}{I} / \frac{V}{A}$	10	10,7	11,1	10,9	11,1	10,6	11,1	11

Genauere Messungen bestätigen diese Proportionalität:

**Ohmsches Gesetz:**

Die Spannung an den Enden eines metallischen Leiters ist zur Stromstärke des durchfließenden Stromes proportional.

Dieses Gesetz ist jedoch (wie viele physikalische Gesetze) nicht uneingeschränkt gültig. Es trifft nicht auf alle Materialien gleichermaßen zu und auch nicht, wenn sich die Temperatur des Leiters ändert (etwa in Glühlampen). Es gibt jedoch besondere Metallegierungen (z. B. Konstantan), bei denen das Ohmsche Gesetz auch bei starkem Stromfluss und daraus folgender Erhitzung gültig bleibt. Trifft das Ohmsche Gesetz zu, so definiert man den

$$\text{Widerstand } R = \frac{U}{I}, \quad \text{Basiseinheit } \text{Ohm } 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Ein Gerät hat also einen Widerstand von  $1 \Omega$ , wenn bei  $1 \text{ V}$  anliegender Spannung ein Strom von  $1 \text{ A}$  durch das Gerät fließt.

**e. Der spezifische Widerstand.** Wovon ist nun der Widerstand eines Drahtes abhängig? Mögliche Parameter sind die Länge  $l$  des Drahtes, seine Querschnittsfläche  $A$  sowie das Material. Man stellt nun fest, dass (nicht ganz unerwartet) der Widerstand mit der Länge  $l$  steigt und mit zunehmender Querschnittsfläche  $A$  sinkt. Genauer kann man beobachten, dass Widerstand  $R$  und Länge  $l$  im gleichen Verhältnis wachsen; sie sind *proportional*. Für die Abhängigkeit von der Querschnittsfläche kann dies nicht zutreffen. Bei genauerer Beobachtung stellt man jedoch fest, dass sich der Widerstand bei Halbierung der Fläche verdoppelt und dass er bei Verdreifachung der Fläche auf ein Drittel sinkt. Indem man statt mit  $A$  mit dem Kehrwert  $\frac{1}{A}$  vergleicht, erkennt man, dass  $R$  im gleichen Verhältnis steigt wie dieser Kehrwert:  $R$  und  $\frac{1}{A}$  sind proportional zueinander. Man sagt dann auch:  $R$  und  $A$  sind *umgekehrt* proportional zueinander.

$$R, A \text{ umgekehrt proportional} \iff R \sim \frac{1}{A} \iff \frac{R}{1/A} \text{ konstant} \iff R \cdot A \text{ konstant.}$$

Zwei Größen sind also umgekehrt proportional zueinander, wenn ihr Produkt konstant ist.

Setzt man beide oben genannten Proportionalitäten zusammen, so erhält man

$$R \sim \frac{l}{A} \iff \rho = \frac{R}{l/A} \text{ ist konstant.}$$

Diese Konstante enthält die Materialabhängigkeit des Widerstandes und wird *spezifischer* Widerstand genannt. Kennt man diese, so kann man den Widerstand von Drähten aus seinen Abmessungen berechnen:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

**f. Leistung.** Wenn man ein elektrisches Gerät (etwa eine Waschmaschine oder ein anderes größeres Haushaltsgerät) kauft und an den Stromkreis anschließen will, muss man sicherstellen, dass dadurch kein Schaden verursacht wird. Zunächst muss das Gerät für die ortsübliche Spannung (in Europa  $220\text{--}230 \text{ V}$ ) geeignet sein. Sodann muss aber auch sichergestellt werden, dass die elektrischen Leitungen nicht durch eine zu große Stromstärke überlastet werden. Allerdings ist die Stromstärke auf dem Gerät *nicht* angegeben. Stattdessen findet man auf dem Typschild neben der Spannung die *Leistung* des Gerätes. Wie hängt diese mit der Stromstärke zusammen?

Wir erinnern uns: Die Spannung  $U$  ist das Verhältnis zwischen der Energie  $W$ , die beim Transport einer Ladung frei wird, zur transportierten Ladungsmenge  $Q$ :  $U = \frac{W}{Q}$ . Die Leistung  $P$  ist definitionsgemäß das Verhältnis von verrichteter Arbeit  $W$  zur dafür benötigten Zeit  $t$ , also ergibt sich bei Transport der Ladung  $Q$  in der Zeit  $t$  über eine Spannungsdifferenz  $U$  für die Leistung

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot Q}{t}.$$

Nun bedeutet der Transport einer Ladungsmenge  $Q$  in der Zeit  $t$  einen Strom der Stärke  $I = \frac{Q}{t}$ , und man erhält schließlich die wichtige Beziehung für die Leistung  $P$  eines elektrischen Stromes:

$$P = U \cdot I.$$

Zugleich ergibt sich für die Einheiten

$$1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}.$$

Man kann also bei Kenntnis der Spannung  $U$  und der Leistung  $P$  den entstehenden Stromfluss  $I$  ermitteln und überprüfen, ob dieser für die eingebauten Sicherungen nicht zu stark ist.

Was geschieht nun, wenn man ein solches Gerät an einer ungeeigneten Spannungsquelle betreibt? Ist die Spannung zu hoch, so wächst auch die Stromstärke (bei einem Ohmschen Widerstand proportional), und das Gerät wird überlastet und möglicherweise beschädigt.

Ist hingegen  $U$  niedriger als vorgesehen, so wird das Gerät unbeschadet bleiben, aber seinen Zweck nicht erfüllen, da mit der Spannung auch die Stromstärke und damit die Leistung des Gerätes sinken. Bei einem Ohmschen Widerstand  $R$  erhält man

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}.$$

Die Leistung ist also bei konstantem Widerstand  $R$  proportional zum Quadrat der Spannung; man sagt: Die Leistung wächst quadratisch mit der Spannung.

$$\boxed{R \text{ konstant} \implies P \sim U^2.}$$

Halbiert sich also die Spannung, so sinkt die Leistung auf ein Viertel!

Zugleich kann man aus obiger Gleichung den Zusammenhang zwischen Widerstand und Leistung (bei konstanter Spannung) ablesen:

$$\boxed{U \text{ konstant} \implies P \text{ und } R \text{ umgekehrt proportional.}}$$

Übung: Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen  $P$  und  $I$  bei konstantem Widerstand und zwischen  $P$  und  $R$  bei konstanter Stromstärke  $I$ .

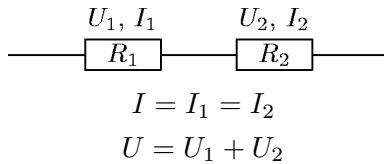
## 2. Elektrische Schaltungen.

**a. Reihen- und Parallelschaltung.** Die einfachsten Schaltungen verschiedener elektrischer Bauteile sind die Reihen- und die Parallelschaltung von Widerständen. Wir wollen untersuchen, welchen Einfluss diese auf Spannung, Stromstärke und Widerstand haben. In den folgenden Überlegungen bezeichnen wir für einen Widerstand  $R_k$  mit  $I_k$  den hindurch fließenden Strom und mit  $U_k$  den Spannungsabfall an diesem Widerstand. Weiter bezeichne  $I$  den Gesamtstrom sowie  $U$  den gesamten Spannungsabfall an der Schaltung. Dann gilt:



### Reihenschaltung:

Die Leitungen sind unverzweigt, also ist der durchfließende Strom überall derselbe:  $I = I_1 = I_2$ . Dagegen addieren sich die Spannungen, da sich der Energiebedarf für einen Ladungstransport über  $R_1$  und anschließend über  $R_2$  addiert:  $U = U_1 + U_2$ .



Daher addieren sich bei einer Reihenschaltung die Widerstände:

Reihenschaltung:  $R = R_1 + R_2$

denn

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} = R_1 + R_2.$$

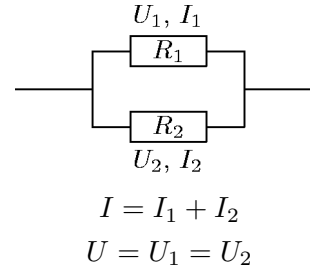
Da die Stromstärke in beiden Widerständen gleich ist, erhält man für die Teilspannungen  $U_1 = R_1 I$  und  $U_2 = R_2 I$  die *Spannungsteilerregel*:

In einer Reihenschaltung verhalten sich die Teilspannungen wie die Widerstände:

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2.$$

### Parallelschaltung:

Hier teilt sich der Strom auf zwei parallele Wege auf:  $I = I_1 + I_2$ , während der Spannungsabfall an beiden Widerständen derselbe ist, da sie an den gleichen Stellen angeschlossen sind:  $U = U_1 = U_2$ .



Hier addieren sich die Kehrwerte der Widerstände:

Parallelschaltung:  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

denn

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Da der Spannungsabfall an beiden Widerständen gleich ist, erhält man für die Teilströme  $I_1 = \frac{U}{R_1}$  und  $I_2 = \frac{U}{R_2}$  die *Stromteilerregel*:

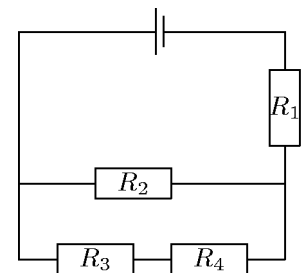
In einer Parallelschaltung verhalten sich die Teilströme umgekehrt wie die Widerstände:

$$I_2 : I_1 = R_1 : R_2.$$

**b. Einfache Schaltungen.** Wenn man Schaltungen mit einer größeren Zahl von Widerständen analysieren will, versucht man diese zunächst in Teile zu zerlegen, die sich aus Reihen- oder Parallelschaltungen zusammensetzen. Man bestimmt dann für jeden Teil einen Ersatzwiderstand und kann so sukzessive den Gesamtwiderstand und dann alle sonstigen Größen ermitteln.

Betrachten wir einmal die nebenstehende Schaltung. Gegeben seien die Widerstände  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 7 \text{ k}\Omega$  und  $R_4 = 8 \text{ k}\Omega$ . Eine Analyse der Schaltung besteht in der Bestimmung aller Spannungsabfälle  $U_i$  an den Widerständen sowie der Stromstärken  $I_i$  durch die Widerstände  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) bei vorgegebener Spannung  $U = 15 \text{ V}$  an der Quelle.

Bei nebenstehender Schaltung sind die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  in Reihe geschaltet und der Ersatzwiderstand ist  $R_{34} = R_3 + R_4 = 15 \text{ k}\Omega$ . Dieser Widerstand  $R_{34}$  ist parallel zu  $R_2$  geschaltet, also gilt für den Ersatzwiderstand  $R_{234}$ :



$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{10 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{15 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{6 \text{ k}\Omega},$$

d. h.  $R_{234} = 6 \text{ k}\Omega$ . Schließlich ist dieser Widerstand  $R_{234}$  in Reihe mit  $R_1$  geschaltet und der Gesamtwiderstand ist

$$R = R_{234} + R_1 = 10 \text{ k}\Omega.$$

Damit beträgt bei der Spannung  $U = 15 \text{ V}$  die Gesamtstromstärke

$$I = \frac{U}{R} = \frac{15 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 1,5 \text{ mA}.$$

Wegen  $I = I_1$  ergibt dies  $U_1 = R_1 \cdot I = 4 \text{ k}\Omega \cdot 1,5 \text{ mA} = 6 \text{ V}$ . Daraus ergibt sich weiter

$$U_2 = U_{34} = U - U_1 = 15 \text{ V} - 6 \text{ V} = 9 \text{ V}.$$

Damit lässt sich die Aufspaltung der Stromstärken bestimmen:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{9 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0,9 \text{ mA},$$

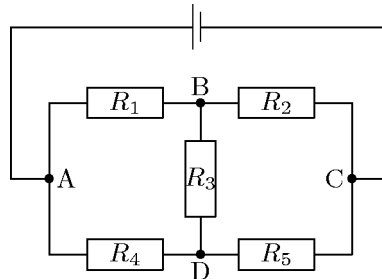
$$I_{34} = I - I_2 = 1,5 \text{ mA} - 0,9 \text{ mA} = 0,6 \text{ mA}.$$

Schließlich ermitteln wir aus dem Strom  $I_{34}$  durch die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  den Spannungsabfall an ihnen:

$$U_3 = R_3 \cdot I_{34} = 7 \text{ k}\Omega \cdot 0,6 \text{ mA} = 4,2 \text{ V},$$

$$U_4 = R_4 \cdot I_{34} = 8 \text{ k}\Omega \cdot 0,6 \text{ mA} = 4,8 \text{ V}.$$

**c. Kirchhoffs Maschen- und Knotenregeln.** Nicht alle Schaltungen lassen sich in der beschriebenen Weise auf eine Kombination von Reihen- und Parallelschaltungen zurückführen. Etwa in folgender Schaltung kann man an keiner Stelle eine Reihen- oder Parallelschaltung herausgreifen.



Man muss daher auf die schon zur Analyse der Parallelschaltung in Abschnitt a. benutzten grundlegenden Prinzipien zurückgreifen:

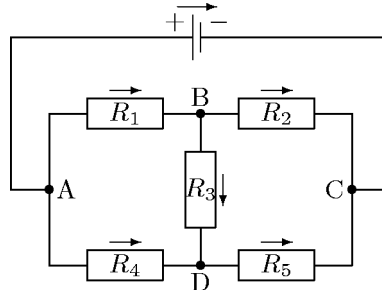
1. An jedem Verzweigungspunkt der Schaltung (*Knoten* genannt) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (Erhaltung der Ladung).
2. Der Spannungsabfall zwischen zwei Punkten ist über jeden Verbindungsweg derselbe (Prinzip der Energieerhaltung). Gleichwertig damit ist, dass über jeden geschlossenen Weg (*Masche* genannt) der Spannungsabfall 0 ist.

**Knotenregel:** Für jeden Knoten sind die Summen der zu- und der abfließenden Ströme gleich.

**Maschenregel:** Für jede Masche ist die Summe der Spannungen 0.

Bei der Anwendung dieser beiden Regeln muss man in geeigneter Weise die Richtung (bzw. Vorzeichen) der Ströme und Spannungen beachten. Da vor der Analyse nicht an allen Stellen die Richtung des Stromes feststeht (etwa bei  $R_3$ ), legt man für jeden Widerstand eine *Messrichtung*

für den Strom fest, in der die Stromstärke positiv gewertet wird. Ergibt dann die Analyse, dass die Stromstärke negativ ist, so bedeutet dies, dass der Strom tatsächlich in umgekehrter Richtung fließt. Mit der Stromrichtung legt man dann auch das Vorzeichen des Spannungsabfalls an den Widerständen als positiv in Richtung des Stromes fest:  $U = RI$ . Für Spannungsquellen, an denen ja die Spannung nicht abfällt, sondern erzeugt wird, wertet man die Spannung entgegen der Richtung des durch die Quelle fließenden Stromes, d.h. vom Plus- zum Minuspol als positiv. Die in nachfolgender Skizze eingezeichneten Pfeile geben also die Richtung des positiven Spannungsabfalls an.



Zur Analyse dieser Schaltung erstellt man nun aufgrund der beiden obigen Regeln Gleichungen für die gesuchten Stromstärken  $I_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) sowie die durch die Spannungsquelle fließende Gesamtstromstärke  $I_g$ . Dabei liefert jeder Knoten und jede Grundmasche<sup>1)</sup> eine Gleichung. Bei gegebener Spannung  $U$  der Quelle erhält man für obige Schaltung die nachfolgenden Gleichungen.

Knoten	Gleichung	Masche	Gleichung
A	$I_g = I_1 + I_4$	ABDA	$R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$
B	$I_1 = I_2 + I_3$	BCDB	$R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0$
C	$I_2 + I_5 = I_g$	ABCA	$R_1 I_1 + R_2 I_2 - U = 0$
D	$I_3 + I_4 = I_5$		

Man erhält so ein lineares Gleichungssystem, das man mit den üblichen Methoden lösen kann. In diesem Gleichungssystem kann man nun eine beliebige der Knotengleichungen streichen, da jede Knotengleichung äquivalent ist zur Summe aller übrigen Knotengleichungen. Dies beruht darauf, dass die Summe *aller* Knotengleichungen allgemeingültig ist, da auf beiden Seiten genau das gleiche steht, denn jeder von einem Knoten wegfließende Strom (=Summand auf der rechten Seite der Gleichung) muss zu einem anderen Knoten hinfließen, ist also auch ein Summand auf der linken Seite der Gleichung.

In unserem obigen Beispiel erhalten wir insgesamt 6 lineare Gleichungen (3 Knoten-, 3 Maschengleichungen) für die 6 Unbekannten  $I_1, \dots, I_5, I_g$ . Zur Lösung wird man zunächst mit jeder Knotengleichung jeweils eine der Unbekannten eliminieren. Auf diesem Wege erhält man ein Gleichungssystem, das nur aus den Maschengleichungen besteht und genauso viele Unbekannte wie Gleichungen hat. Dieses löse man dann mit einem geeigneten Lösungsverfahren, bevorzugt dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

---

Umändern; statt  $x_k$  einzuführen, besser durch Einheit  $k\Omega$  teilen! Vgl. Übung E4

---

Wir wollen einmal ein konkretes Beispiel durchrechnen:  $U = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  und  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ . Wir streichen Gleichung C, wir eliminieren mittels A die Unbekannte  $I_g = I_1 + I_4$ , mittels D die Unbekannte  $I_5 = I_3 + I_4$  und mittels B die Unbekannte  $I_3 = I_1 - I_2$ . Setzt man dies in die 3 Maschengleichungen ein, erhält man das folgende  $3 \times 3$ -Gleichungssystem

---

<sup>1)</sup> Darunter verstehen wir einen geschlossenen Weg, der keine inneren Abzweige besitzt und sich so nicht in zwei kleinere Maschen zerlegen lässt.

für die Maßzahlen  $x_k$  der Stromstärken  $I_k = x_k$  mA ( $k = 1, 2, 4$ ):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4x_1 + (x_1 - x_2) - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2((x_1 - x_2) + x_4) - (x_1 - x_2) = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 100 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 100 \end{bmatrix} \\ \iff & \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ -8x_1 + 6x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 100 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ -8x_1 + 6x_2 = 0 \\ 5x_2 = 100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun sukzessive (nacheinander) auflösen:

$$x_2 = 20, \quad x_1 = \frac{3}{4}x_2 = 15, \quad x_4 = \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 27,5.$$

Man erhält so

$$I_1 = 15 \text{ mA}, \quad I_2 = 20 \text{ mA}, \quad I_3 = I_1 - I_2 = -5 \text{ mA}, \quad I_4 = 27,5 \text{ mA}, \quad I_5 = I_3 + I_4 = 22,5 \text{ mA}.$$

Dass  $I_3$  negativ ist, bedeutet, dass der Strom durch  $R_3$  *entgegen* der oben skizzierten Messrichtung fließt.

Aus der Gesamtstromstärke

$$I_g = I_1 + I_4 = I_2 + I_5 = 42,5 \text{ mA}$$

kann man nun auch den Gesamtwiderstand der Schaltung bestimmen:

$$R_g = \frac{U}{I_g} = \frac{100 \text{ V}}{42,5 \text{ mA}} = 2,4 \text{ k}\Omega.$$

**d. Die Wheatstone-Brücke.** Die obige Schaltung ist bekannt unter dem Namen *Wheatstone-Brücke* und wird benutzt zur Messung von Widerständen. Zwar kann man im Prinzip Widerstände ermitteln, indem man eine Spannung anlegt, diese und den durchfließenden Strom misst und daraus den Widerstand berechnet. Nun erfolgt Spannungsmessung in der Regel mit einem Drehspulmessgerät. Der durch das Messgerät fließende Strom verfälscht aber die Situation. Mit Hilfe der Wheatstone-Brücke kann man *stromlos* Widerstände bestimmen.

Dazu benutzt man die obige Schaltung, in der

- der Widerstand  $R_3$  durch ein Amperemeter ersetzt wird,
- der Widerstand  $R_2$  unbekannt ist und gemessen werden soll,
- der Widerstand  $R_5$  variabel ist.

Man variiert nun den Widerstand  $R_5$  so, dass durch das Messgerät  $R_3$  *kein* Strom fließt! Man kann dann aus den drei bekannten Widerständen den unbekanntem ermitteln.

Zunächst erhält man nach der Knotenregel aus  $I_3 = 0$ , dass  $I_1 = I_2$  und  $I_4 = I_5$  ist. Wenn  $I_3 = 0$  ist, ist aber auch die Spannung  $R_3 I_3 = 0$  und aus der Maschenregel folgt  $R_1 I_1 = R_4 I_4$  sowie  $R_2 I_2 = R_5 I_5$ . Wegen  $I_1 = I_2$  und  $I_4 = I_5$  bedeutet dies

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_5},$$

womit man jeden der Widerstände aus den übrigen ermitteln kann. (Für Beispiele siehe Übungen (E4)).

**e. Mehrere Spannungsquellen und der Überlagerungssatz.** Das in c. beschriebene Vorgehen wird insbesondere immer dann notwendig, wenn in einer Schaltung *mehrere* Spannungsquellen auftreten. Man geht dann wie oben allgemein beschrieben vor (siehe Übung (E4), Aufgaben 1) und 3)).

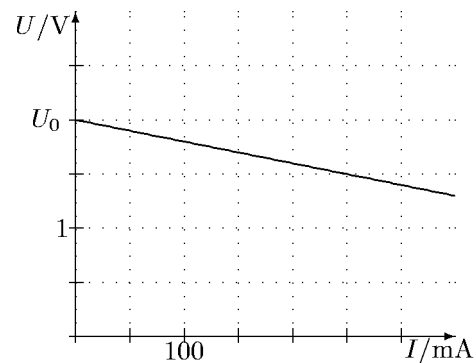
Man kann jedoch diese allgemeine Situation auf Schaltungen mit jeweils nur *einer* Spannungsquelle reduzieren durch den sog.

**Überlagerungssatz:** Die Wirkungen der einzelnen Spannungsquellen sind unabhängig voneinander. Die Stromstärken in einer Schaltung ergeben sich als die Summen der Stromstärken, die man erhält, wenn jeweils nur *eine* der auftretenden Spannungsquellen aktiv ( $U \neq 0$ ) und alle anderen inaktiv ( $U = 0$ ) sind.

*Begründung:* Zunächst sind Knoten- und Maschengleichungen lineare Gleichungen für die unbekanntes Stromstärken, bei denen auf der rechten Seite die Spannungen  $U_j$  der Spannungsquellen und sonst immer 0 auftritt. Indem man nun jeweils alle bis auf *eine* Spannung = 0 setzt und dieses System löst, erhält man Stromstärken, die diese eine Maschengleichung erfüllen und bei allen anderen Gleichungen den Wert 0 ergeben. Addiert man die gefundenen Lösungen, so addieren sich die rechten Seiten, so dass sich nun in *jeder* Maschengleichung einmal der gewünschte Spannungswert ergibt und so alle Gleichungen erfüllt sind.

**f. Nachtrag: Die reale Spannungsquelle.** Die Erfahrung zeigt, dass die Spannung einer Spannungsquelle (entgegen unseren bisherigen Annahmen) nicht konstant ist, sondern mit der Stromstärke sinkt. Von der *Urspannung* (oder auch Leerlaufspannung)  $U_0$  ausgehend nimmt die *Klemmenspannung*  $U$  ab. In Messungen findet man eine *lineare* Abnahme (etwa wie in nebenstehender Skizze). Die Spannung  $U$  verhält sich also so, als ob an einer Quelle mit der konstanten Spannung  $U_0$  ein Widerstand angeschlossen ist, an dem die Spannung proportional zu  $I$  abfällt:  $U = U_0 - R_i I$ .

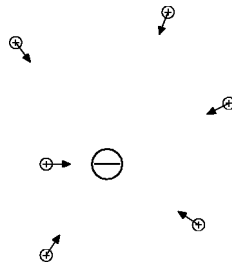
Man nennt  $R_i$  den *Innenwiderstand* der Quelle. Bei der Untersuchung einer Schaltung mit realer Spannungsquelle kann man also wie bisher vorgehen, man muss lediglich den Innenwiderstand der Quelle in die Schaltung aufnehmen.



## II. Ladung und elektrisches Feld

### 3. Das elektrische Feld

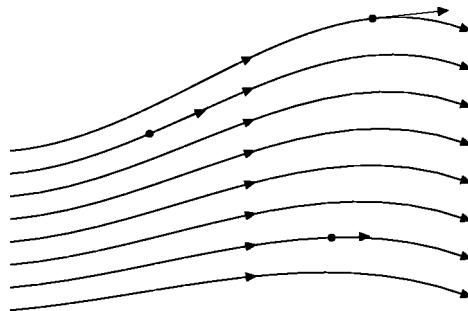
**a. Der Feldbegriff.** Ausgangspunkt für den Begriff des elektrischen Feldes ist die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen: Jede Ladung übt auf andere Ladungen Kräfte aus.



In Verallgemeinerung davon sprechen wir immer dann von einem elektrischen Feld, wenn an einer Stelle des Raumes auf Ladungen Kräfte ausgeübt werden:

Ein elektrisches Feld ist ein Zustand des Raumes, in dem Kräfte auf elektrische Ladungen ausgeübt werden.

Dabei ist es unerheblich, was die Ursache dieser Kraftwirkung ist. Jede Ladung erzeugt um sich ein elektrisches Feld, denn es werden Kräfte auf andere Ladungen ausgeübt. Aber elektrische Felder können auch anders entstehen! Und dies ist der Grund, warum man den Begriff des Feldes von der erzeugenden Ladung trennt. Das nachfolgende Bild veranschaulicht ein solches Feld durch die sog. *Feldlinien*. Zugleich ist dadurch an jedem Punkt des Raumes die Richtung der Feldkraft auf positive Ladungen bestimmt. (Für negative Ladungen wird die Richtung umgekehrt.) In dem Bild sind für drei Stellen des Raumes positive Probeladungen mit den Kraftvektoren eingezeichnet. Diese verlaufen jeweils tangential zu den Feldlinien.

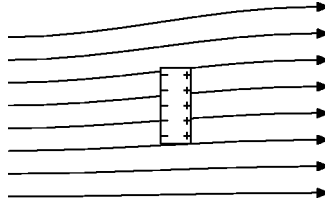


**b. Die Feldstärke.** Um ein Maß für die Stärke eines elektrischen Feldes festzulegen, gehen wir von den das Feld konstituierenden Kräften aus: Auf jede Ladung wirkt eine Kraft. Verdoppelt man die Ladung, so verdoppelt sich auch die Kraft, da ja auf *jede* Ladung die entsprechende Kraft wirkt; die wirkende Kraft ist also proportional zur Größe der Probeladung. Der (von der Probeladung  $q$  unabhängige) Quotient von wirkender Kraft zur Ladung ist ein Maß für die Stärke des Feldes, die sog. Feldstärke  $E = \frac{F}{q}$ . Da Kräfte gerichtete Größen sind, ist auch die Feldstärke gerichtet. Man legt als Richtung von  $\vec{E}$  die Richtung der auf eine *positive* Probeladung wirkenden Feldkraft  $\vec{F}$  fest. Man erhält so die folgende Definition der Feldstärke:

Feldstärke:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ .

Hierbei ist  $q$  die ins Feld gebrachte Probeladung und  $\vec{F}$  die auf diese Ladung wirkende Kraft. Ist dabei  $q$  negativ, so erhält man eine Richtungsumkehr: Die Richtung der Kraft auf eine *negative* Ladung ist *umgekehrt* zur Richtung des *Feldes*. Als Einheit für die Feldstärke ergibt sich aufgrund der Definition:  $1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ .

**c. Flächenladungsdichte und elektrische Feldgleichung.** Bringt man eine Metallplatte in ein elektrisches Feld, so wirken auf die in dem Metall befindlichen Ladungen Kräfte. Die in einem Leiter frei beweglichen Elektronen werden dann durch die Feldkräfte in Bewegung gesetzt und sammeln sich an der Metalloberfläche. Dadurch entsteht in der Metallplatte eine



Ladungstrennung, die Oberflächen sind (entgegengesetzt) geladen; man nennt dies *Influenz*. Da die Platte insgesamt neutral ist, befindet sich auf den beiden Seiten der Platte die gleiche Ladung  $Q$ , nur von unterschiedlichem Vorzeichen. Diese Ladung ist zunächst einmal proportional zu der Fläche  $A$ , auf der sie sich verteilt. Wir definieren die

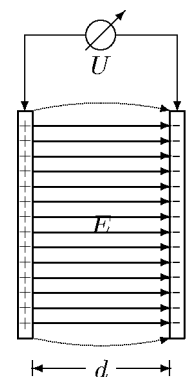
Flächenladungsdichte:  $\sigma = \frac{Q}{A}$ .

Allerdings sammeln sich nicht alle freien Elektronen auf der einen Seite, sondern nur ein Teil. Dies beruht darauf, dass die getrennten Ladungen ebenfalls Kräfte aufeinander ausüben, und zwar anziehende. Diese sind den Feldkräften entgegengesetzt. Es kommt so zu einem Ausgleich: Das Innere des Leiters ist kräftefrei! (Andernfalls würden sich die freien Elektronen bewegen.) Wenn aber im Innern keine Kräfte wirken, kann dort auch kein Feld mehr vorhanden sein. Das Innere eines Leiters ist feldfrei<sup>1)</sup>. Durch die Ladungstrennung wird also ein zum äußeren Feld entgegengesetzt gerichtetes, gleich starkes Feld aufgebaut. Die Ladungsmenge  $Q$  auf den Plattenoberflächen ist also gerade so groß, dass das dadurch erzeugte Feld das ursprüngliche genau kompensiert. Also ist auch die Flächenladungsdichte  $\sigma$  ein Maß für die Stärke des äußeren Feldes (an der Stelle, wo sich die Platte befindet).

Es gilt nun der folgende fundamentale Gesetzmäßigkeit: Feldstärke  $E$  und Flächenladungsdichte  $\sigma$  sind proportional zueinander. Die Proportionalitätskonstante ist die *elektrische Feldkonstante*  $\epsilon_0$ , deren Wert experimentell bestimmt wird. Wir fassen zusammen:

Elektrische Feldgleichung:  $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$ ,  
 Elektrische Feldkonstante:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}$ .

**d. Elektrisches Feld und Spannung.** Wir betrachten hier der Einfachheit halber homogene elektrische Felder. Man nennt ein elektrisches Feld *homogen*, wenn der Feldstärkevektor  $\vec{E}$  überall gleich ist, wenn also das Feld an allen Stellen die gleiche Richtung und die gleiche Stärke hat. Ein solches homogenes Feld erhält man zwischen den geladenen Platten eines *Plattenkondensators*. Dieser besteht aus zwei Metallplatten, die durch Vakuum, Luft oder andere Isolatoren gegeneinander isoliert sind. Ist der Plattenabstand  $d$  klein im Vergleich zu den Maßen der Platten, so ist das Feld zwischen den Platten weitgehend homogen. (An den Rändern ist das Feld schwächer und leicht gekrümmt.)



<sup>1)</sup> Auf dieser Tatsache beruht das Prinzip des Faradayschen Käfigs: Ein geschlossener metallischer Käfig ist im Innern feldfrei und schirmt so das Innere gegen äußere Elektrizität, etwa einen Blitz oder sonstige Hochspannung ab.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Feldstärke  $E$  und der Spannung  $U$ ? Definitionsgemäß ist die Spannung  $U$  zwischen zwei Punkten das Verhältnis der Energie  $W$  zur Ladung  $q$ :  $U = \frac{W}{q}$ , wobei  $W$  die Energie ist, die benötigt wird, um die Ladung  $q$  vom einen zum anderen Punkt zu bringen. Also benötigt man zum Transport der Ladung  $q$  die Energie  $W = U \cdot q$ .

Warum wird dabei Energie benötigt? Um etwa ein Elektron in Feldrichtung zu bewegen, muss man die Feldkraft überwinden. Man muss also über die Strecke  $d$  die Kraft  $F = E \cdot q$  aufbringen. Gemäß der fundamentalen Definition der Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg (bei gleicher Richtung) erhalten wir:

$$W = F \cdot d = Eq \cdot d, \quad \text{also} \quad U = \frac{W}{q} = E \cdot d.$$

Dies bedeutet allgemein:

In einem homogenen Feld ist die Spannung  $U$  zwischen zwei Punkten proportional zum Abstand  $d$  der Punkte (gemessen in Richtung des Feldes); der Proportionalitätsfaktor ist die Feldstärke  $E$ :  $U = E \cdot d$ .

Insbesondere kann man die Feldstärke in einem Kondensator aus Spannung  $U$  und Plattenabstand  $d$  ermitteln:

Feldstärke eines Plattenkondensators:  $E = \frac{U}{d}$ .

#### 4. Kondensatoren.

**a. Die Kapazität.** Kondensatoren bestehen im Grundprinzip aus zwei gegeneinander isolierten elektrischen Leitern (Platten, Folien o. ä.). Sie dienen der Ladungsspeicherung. Schließt man Kondensatoren an eine Spannungsquelle an, so werden beide Platten elektrisch geladen. Die Höhe der Ladung ist von der angelegten Spannung abhängig. Man stellt fest, dass die Ladung  $Q$  auf den Platten proportional ist zur Spannung  $U$  zwischen den Platten. Man definiert nun die

Kapazität:  $C = \frac{Q}{U}$ .

Die Kapazität ist ein Maß für die Fähigkeit des Kondensators, Ladungen zu speichern. Die Einheit der Kapazität ist das Farad  $1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$ . Ein Kondensator hat demnach eine Kapazität von 1 F, wenn bei einer Ladung von 1 C eine Spannung von 1 V herrscht. Die Einheit Farad ist sehr groß; gängige Kondensatoren haben Kapazitäten im  $\mu\text{F}$ -Bereich.

Wovon hängt nun die Kapazität ab? Man darf vermuten, dass mit steigender Plattengröße die Kapazität wächst. Aufgrund der elektrischen Feldgleichung  $\epsilon_0 \cdot E = \sigma = \frac{Q}{A}$  und der Homogenität des Feldes erhalten wir tatsächlich:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma A}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot E \cdot A}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot E \cdot A}{E \cdot d} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}.$$

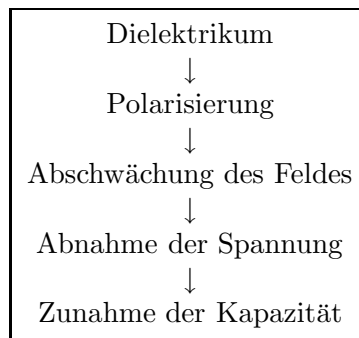
Die Kapazität ist also zur Plattenfläche  $A$  proportional; zugleich erkennen wir, dass sie zum Plattenabstand *umgekehrt* proportional ist. Um die Kapazität zu erhöhen, kann man also auch den Plattenabstand verkleinern. Dies hat jedoch technische Grenzen, da die Platten ja gegeneinander isoliert sein müssen. In der Praxis werden daher die Platten nicht durch Vakuum oder Luft, sondern durch andere Isolatoren getrennt. Die Art des isolierenden Materials hat einen zusätzlichen Einfluss auf die Kapazität, die sich dadurch um einen materialabhängigen Faktor,



die sog. *Dielektrizitätskonstante*  $\epsilon_r$  vergrößert. (Für Vakuum ist  $\epsilon_r = 1$ , ebenso näherungsweise für Luft.) Wir erhalten so die Möglichkeit, die Kapazität eines Kondensators aus Plattenfläche  $A$ , Plattenabstand  $d$  und Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  zu ermitteln:

Kapazität eines Plattenkondensators:  $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$ .

Wie kommt diese Kapazitätserhöhung zustande? Bringt man in einen isolierten (von einer Spannungsquelle getrennten) Kondensator ein Dielektrikum, so wirken auf die auch in einem Dielektrikum vorhandenen Ladungen Kräfte. Diese führen zu einer (partiellen) Verschiebung der Ladung (*Polarisierung*) und damit einem elektrischen Feld. Dieses ist dem äußeren Feld entgegengesetzt und schwächt es; dadurch sinkt die ursprüngliche Feldstärke und folglich auch die Spannung. Da die Ladung auf den Platten unverändert ist und definitionsgemäß  $C = \frac{Q}{U}$  ist, *steigt* dann die Kapazität. Schematisch:

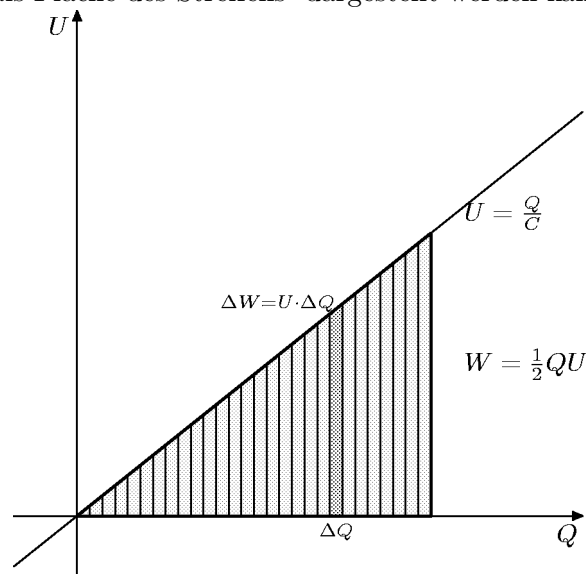


**b. Energie.** Um einen Kondensator zu laden, benötigt man Energie. Man muss nämlich Ladung  $q$  von einer Platte zur anderen schaffen. Die dafür benötigte Energie ist bestimmt durch die zu transportierende Ladung  $q$  und die zwischen den Platten herrschende Spannung  $U$ :  $W = U \cdot q$ .

Nun ist die Spannung  $U$  aber nicht konstant, sondern sie wächst mit der Ladung der Platten gemäß der Tatsache, dass  $U$  zu  $Q$  proportional ist (siehe Skizze):

$$C = \frac{Q}{U} \iff U = \frac{Q}{C}.$$

Je mehr Ladung also bereits auf einer Platte angesammelt ist, desto mehr Spannung herrscht zwischen den Platten und desto mehr Energie benötigt man für den Transport weiterer Ladung. Unterteilt man einmal den Ladungsvorgang in kleine Abschnitte, so kann man in diesen Abschnitten die Spannung  $U$  als (nahezu) konstant ansehen, so dass die benötigte Energie  $\Delta W = U \cdot \Delta Q$  ist und als Fläche des Streifens dargestellt werden kann (siehe Skizze). Addiert



man die benötigte Energie für alle Abschnitte auf, so erhält man die Gesamtenergie als Fläche unter der  $U$ - $Q$ -Kurve:

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q \cdot \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(CU)^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2.$$

Der Energieinhalt eines Kondensators wächst also *quadratisch* mit der Spannung bzw. quadratisch mit der Ladung.

**c. Die Energiedichte des elektrischen Feldes.** Wo ist nun die Energie in einem Kondensator gespeichert? Zunächst ist die getrennte Ladung Quelle von Energie: Wenn man die Ladungen sich ausgleichen lässt, fließt ein Strom und es wird Energie frei. Ich möchte nun deutlich machen, dass das elektrische Feld selbst der Energieträger ist.

Wir gehen aus von der Energie in einem Kondensator:  $W = \frac{1}{2}CU^2$ . Zusammen mit der Kapazitätsformel und der Beziehung  $U = Ed$  zwischen Feldstärke und Spannung ergibt sich

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d} \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot Ad \cdot E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot V.$$

Dies zeigt, dass die Energie des Kondensators (bei fester Feldstärke  $E$ ) proportional ist zum Volumen  $V = Ad$  des felderfüllten Raumes. Je größer dieses Volumen (bei gleicher Feldstärke) ist, desto mehr Energie ist im Feld gespeichert.

In einem felderfüllten Raum ist Energie gespeichert:  $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot V.$

Dividiert man diese Energie durch das Volumen, so erhält man die *Energiedichte* des elektrischen Feldes an der betrachteten Stelle:

Energiedichte des elektrischen Feldes:  $\rho = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot E^2$

Die Energiedichte ist proportional zum *Quadrat* der Feldstärke.

Diese Überlegungen gelten jedoch nicht nur für das Feld in einem Plattenkondensator, sondern ganz allgemein. Wir betrachten dazu ein beliebiges elektrisches Feld (etwa im Vakuum,  $\varepsilon_r = 1$ ) und bringen an eine Stelle eine kleine Metallplatte (wie schon bei den Überlegungen zur Feldgleichung, siehe S. 12). Durch das elektrische Feld werden in der Metallplatte Ladungen influenziert und es entsteht ein Kondensator. In dessen getrennter Ladung ist Energie gespeichert; diese entstammt dem Bereich des äußeren Feldes, in dem das Feld zusammengebrochen ist. Durch den Zusammenbruch des Feldes in einem Volumen  $V$  wird die Energie  $W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \cdot V$  frei. Diese war zuvor in dem felderfüllten Volumen  $V$  gespeichert.

**d. Das radialsymmetrische Feld.** Neben dem homogenen Feld eines Plattenkondensators können wir mit unseren bisherigen Mitteln auch das radialsymmetrische Feld einer geladenen Kugel analysieren. Sei  $Q$  die Ladung auf der Kugel. Wir umschließen diese mit einer ungeladenen großen metallenen Kugel vom Radius  $r$ . Auf dieser wird innen die Ladung  $-Q$  und außen die Ladung  $Q$  influenziert. (Der Ladungsüberschuss insgesamt bleibt konstant  $Q$ .) Auf dieser großen Kugel vom Radius  $r$  erzeugt die Ladung  $Q$  eine Flächenladungsdichte und Feldstärke

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Dies bedeutet: Die Feldstärke des elektrischen Feldes einer Kugelladung  $Q$  ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes  $r$  vom Zentrum der Kugel. Eine Probeladung  $q$  im Abstand  $r$  erfährt also in diesem Feld eine Kraft

$$F = E \cdot q = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Dies gilt insbesondere für zwei Punktladungen im Abstand  $r$  voneinander:

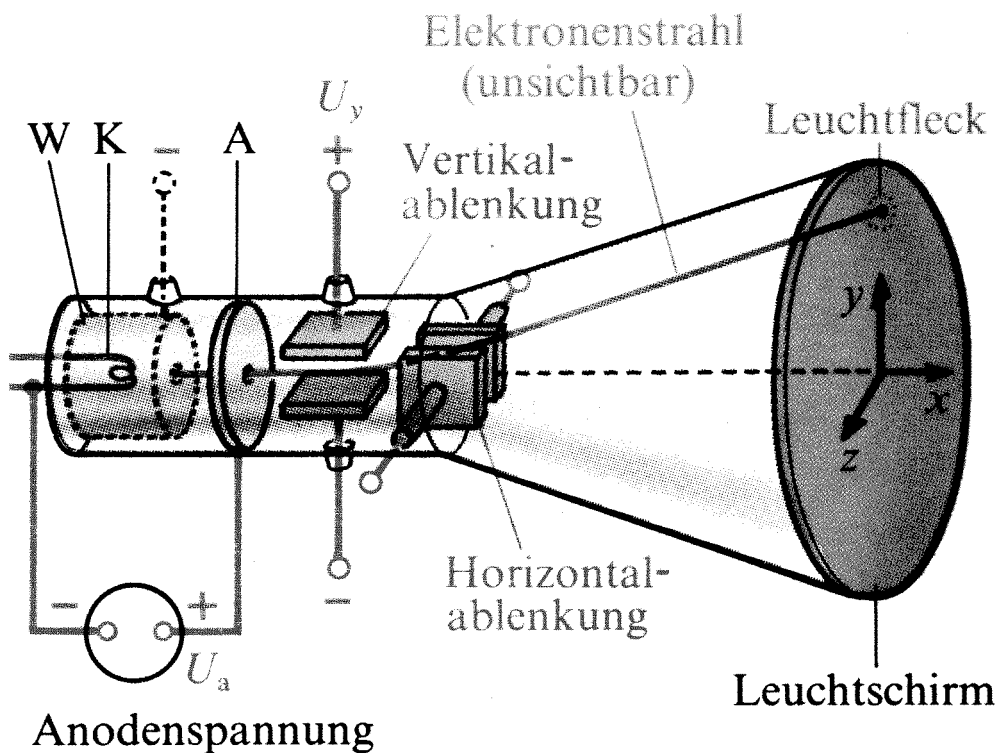
**Coulombsches Gesetz:**

Die Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen ist proportional zu beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes  $r$ :

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

**5. Bewegte Ladung im elektrischen Feld.**

**a. Die Braunsche Röhre.** Eine der weit verbreitetsten Anwendungen bewegter elektrischer Ladung ist die Braun'sche Röhre in Fernsehern, Computer-Monitoren, Oszilloskopen u.a. Ein Strahl von Elektronen wird gezielt auf einen Leuchtschirm geschossen und erzeugt dort einen Leuchtfleck. Eine Vielzahl von Leuchtpunkten ergibt dann insgesamt das Fernsehbild. Das folgende Bild (aus Dorn-Bader: Physik in einem Band, S. 335) zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Braunschen Röhre.



Aus einem Heizdraht, der negativ geladenen *Kathode* K, treten Elektronen aus. Sie werden durch die positiv geladene *Anode* A angezogen und beschleunigt. Ein negativ geladener *Wehnelt-Zylinder* W bündelt den Elektronenstrahl, so dass er durch das Loch in der Anode fliegt und geradlinig genau in die Mitte zwischen die Platten der Ablenkkondensatoren gelangt. Hier werden die Elektronen durch die Feldkräfte der geladenen Kondensatoren gezielt abgelenkt, so dass sie den gewünschten Punkt auf dem Leuchtschirm erreichen.

**b. Die Beschleunigung der Elektronen.** Um einen Elektronenstrahl zu erzeugen, müssen zunächst die aus der Kathode ausgetretenen Elektronen in Bewegung gesetzt, beschleunigt werden. Dazu benutzt man das elektrische Feld, dass durch die Spannung zwischen Kathode (-) und Anode (+) erzeugt wird. Wir bezeichnen sie mit  $U_a$  (Beschleunigungsspannung). Wird ein

Elektron von der Kathode aus der Ruhe heraus zur Anode gezogen, so nimmt es Energie aus dem Feld auf. Gemäß der Spannungsdefinition gilt für die aufgenommene Energie  $W$ :

$$U_a = \frac{W}{e} \iff W = U_a e,$$

wobei  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C die Elementarladung ist. Diese Energie wird in Bewegungsenergie des Elektrons umgesetzt, also

$$U_a e = W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2.$$

Dabei ist  $v$  die Endgeschwindigkeit des Elektrons und  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg seine Masse. Für  $v$  ergibt sich so

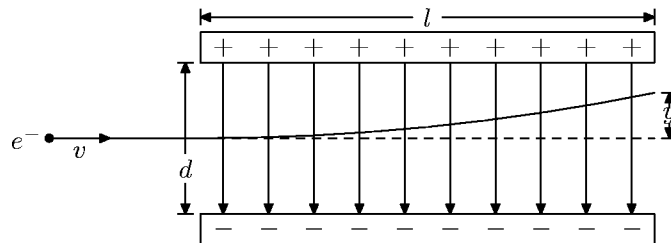
$$U_a e = \frac{1}{2} m_e v^2 \iff v^2 = \frac{2U_a e}{m_e} \iff v = \sqrt{\frac{2U_a e}{m_e}}.$$

Bei einer Beschleunigungsspannung  $U_a = 2$  kV erhält man z. B. die folgende Endgeschwindigkeit  $v$ :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 26,52 \cdot 10^6 \frac{\text{VC}}{\text{kg}} = 26,52 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 26520 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Beachten Sie die hohe Geschwindigkeit, die sich aufgrund der sehr geringen Masse des Elektrons ergibt. Im obigen Beispiel beträgt  $v$  bereits 9% der Lichtgeschwindigkeit  $c \approx 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ . Bei höheren Beschleunigungsspannungen kommt man sehr schnell der Lichtgeschwindigkeit so nahe, dass man die bisherige Newtonsche Mechanik verlassen und Einsteins *spezielle Relativitätstheorie* berücksichtigen muss. Dies können wir hier aber nicht tun.

**c. Die Bahn des Elektronenstrahls.** Wir wollen nun untersuchen, wie der Elektronenstrahl zu einem bestimmten Punkt auf dem Bildschirm gelenkt wird. Dazu beschleunigt man die Elektronen wie oben beschrieben und leitet den Strahl genau in die Mitte zwischen die Platten eines kleinen Kondensators. Dabei ist die Richtung zunächst genau parallel zu den Platten.



Sobald das Elektron in den Plattenkondensator eintritt, erfährt es im elektrischen Feld eine Kraft  $F$ . Diese Kraft ergibt sich aus der Feldstärke durch  $F = Ee$  und ist der Feldrichtung entgegengesetzt (*negative* Ladung). Diese Kraft bewirkt eine zur positiven Platte gerichtete *konstante* Beschleunigung  $a = \frac{F}{m_e}$ . Damit ist die Bewegung des Elektrons im Kondensator eine Überlagerung einer horizontalen gleichförmigen Bewegung (mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$ ) und einer vertikalen Bewegung mit der konstanten Beschleunigung  $a$ . Es handelt sich also um eine Wurfbewegung, wie wir sie in der Mechanik diskutiert haben (wenn auch hier die Beschleunigung nicht die Fallbeschleunigung ist und sie überdies nach oben gerichtet ist).

Wir wollen nun untersuchen, wie weit das Elektron beim Verlassen des Kondensators von seiner ursprünglichen Bahn (gestrichelt gezeichnet) abweicht. Dies hängt von  $v$  und damit von der Beschleunigungsspannung sowie vom Ablenk-Kondensator ab. Es bezeichne  $d$  den Plattenabstand,  $l$  die Länge der Platten (in Richtung der ursprünglichen Elektronenbahn) und  $U$  die Spannung zwischen den Platten (die *Ablenkspannung*).

Aufgrund der horizontalen Geschwindigkeit  $v$  benötigt das Elektron zum Durchqueren des Kondensators die Zeit  $t = \frac{l}{v}$ . Während dieser Zeit wirkt auf das Elektron die elektrische Feldkraft

$F = E \cdot e$  im rechten Winkel zu den Kondensatorplatten, wobei sich die Feldstärke  $E$  des homogenen Feldes aus der Ablenkspannung  $U$  ergibt:  $E = \frac{U}{d}$  und damit  $F = \frac{Ue}{d}$ . Diese (konstante) Kraft bewirkt nun senkrecht zu den Kondensatorplatten die (konstante) Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{Ee}{m_e} = \frac{Ue}{dm_e}.$$

Bei dieser Überlegung kann man das Gewicht des Elektrons außer Acht lassen, da die Gravitationskraft im Vergleich zu den elektrischen Feldkräften winzig ist (siehe Übung (E7), Aufgabe 8).

Die Ablenkung  $y$  von der ursprünglichen Bahn ist die während der Zeit  $t$  vertikal zurückgelegte (Beschleunigungs-)Strecke

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{Ue}{2dm_e} \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{Uel^2}{2dm_e v^2}.$$

Diese Formel erlaubt es, die Ablenkung von der Bahn aus der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  parallel zu den Platten und den Daten des Ablenkcondensators ( $U$ ,  $l$ ,  $d$ ) zu ermitteln. Beachten Sie insbesondere:

Die Ablenkung ist proportional zu Ablenkspannung.

Benutzt man nun noch die oben ermittelte Beziehung für die Geschwindigkeit  $v$ :  $v^2 = \frac{2U_a e}{m_e}$ , so erhält man für die Ablenkung

$$y = \frac{Uel^2}{2dm_e \cdot \frac{2U_a e}{m_e}} = \frac{Ul^2}{4U_a d}.$$

Beachten Sie, dass in dieser Beziehung Ladung und Masse des Elektrons keinen Einfluss auf  $y$  haben;  $y$  kann allein aus den beiden Spannungen (Beschleunigungs- und Ablenkspannung) sowie den Abmessungen des Ablenkcondensators ermittelt werden.

Wenn nun der Elektronenstrahl den Ablenkcondensator verlässt, ist er keiner Kraft mehr ausgesetzt. Er bewegt sich geradlinig gleichförmig weiter bis er auf dem Bildschirm auftrifft.

Will man nun den Elektronenstrahl auf einen bestimmten Punkt eines Bildschirms lenken, so muss man ihn sowohl vertikal ablenken (wie oben diskutiert) als auch in horizontaler Richtung. Dazu setzt man hinter den ersten Ablenkcondensator einen zweiten, dessen Platten im rechten Winkel zum ersten angeordnet sind (parallel zur Zeichenebene) und in dem der Elektronenstrahl in horizontaler Richtung (senkrecht zur Zeichenebene) abgelenkt wird (siehe Abbildung auf S. 16). Damit kann man im Prinzip den Elektronenstrahl auf jeden Punkt des Bildschirms lenken.

**d. Das Oszilloskop.** Während man bei einem Monitor die Ablenkspannung  $U$  steuert, um eine bestimmte Ablenkung  $y$  (und damit letztlich ein bestimmtes Bild auf dem Bildschirm) zu erreichen, kann man umgekehrt aus der Ablenkung auf die anliegende Spannung  $U$  schließen: Man benutzt das Prinzip der Braunschen Röhre zur Messung der Spannung. Da der Elektronenstrahl wegen der geringen Masse der Elektronen nahezu ohne Trägheit in verschiedene Richtungen gelenkt werden kann, kann man damit auch sich schnell ändernde Spannungen (etwa Momentanwerte von Wechselspannungen) messen. Man nennt ein solches Gerät daher Oszilloskop (oszillieren (lat.) = schwingen, pendeln, schwanken).

Nun wird ein sich schnell auf und ab bewegender Bildpunkt von unserem (trägen) Auge nur als eine senkrechte Linie wahrgenommen werden. Um nun die zeitliche Veränderung aufzulösen, setzt man eine zweite Ablenkung im rechten Winkel ein, die das Bild 'auseinanderzieht' und dadurch den Verlauf der Spannung (wie einen Funktionsgraphen) anzeigt.

### III. Magnetismus und Induktion

#### 6. Grundlagen des Magnetismus.

##### a. Magnete, ferromagnetische Stoffe, Pole

- Magnete üben anziehende Kräfte auf sog. *ferromagnetische* Metalle (Eisen, Nickel, Kobalt) aus.
- Magnete haben zwei Pole (Orte stärkster Kraftwirkung).
- Die Pole eines Magneten sind verschieden.  
Gleichartige Pole verschiedener Magnete stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an.
- Eine *Kompassnadel* ist ein drehbar aufgehängter Magnet.
- Die Erde ist ein Magnet; die magnetischen Pole der Erde liegen nahe bei den geographischen Polen.
- Namensgebung für die magnetischen Pole:

Der Pol einer Kompassnadel, der zum *geographischen* Norden der Erde zeigt, wird (magnetischer) Nordpol der Kompassnadel genannt.

Achtung: Diese Festlegung hat notwendig zur Folge, dass im *geographischen Norden* der Erde der *magnetische Südpol* der Erde liegt (da der Nordpol der Kompassnadel dorthin gezogen wird).

- Es gibt keine Magnete mit nur einem Pol. Bricht man einen Stabmagneten in der Mitte durch, so entstehen an der Bruchstelle neue Pole, und zwar so, dass der eine Magnet dort einen Südpol, der andere dort einen Nordpol erhält. Beide Teilstücke sind wieder vollständige Magnete mit zwei verschiedenen Polen.

Es gibt keine magnetischen *Monopole*.

- Man kann ferromagnetische Stoffe *magnetisieren*. Durch Berührung mit einem Magneten wird der ferromagnetische Körper selbst zum Magneten, der wiederum (in schwächerer Form) auf andere ferromagnetische Stoffe Kraft ausübt.  
Beispiel: Unmagnetische Büroklammern hängen in großer Zahl an einem Permanentmagneten, ohne diesen direkt zu berühren. Löst man die Büroklammern vom Magneten, so fallen sie auseinander.
- Man kann ferromagnetische Stoffe (mehr oder weniger) dauerhaft *magnetisieren*, indem man sie langfristig mit einem Magneten in Berührung bringt oder oft immer in der gleichen Richtung mit dem Magneten überstreicht.
- Magnete können durch mechanische Erschütterung (Hammerschlag o.ä.) oder durch Erhitzung ihre magnetische Wirkung verlieren.
- Umgekehrt kann man ferromagnetische Stoffe dauerhaft magnetisieren, indem man sie rot- bis weißglühend erhitzt und sie während des Abkühlens einem starken Magneten aussetzt. Nach dem Erkalten ist die vorübergehende Magnetisierung sozusagen ‘eingefroren’.

##### b. Ein erstes einfaches Modell.

- Ein erstes einfaches Modell für die bisher genannten Phänomene sind die sog. *Elementarmagnete*. Wir stellen uns vor, dass alle ferromagnetischen Stoffe aus kleinen Teilchen (was immer sie sein mögen) zusammengesetzt sind, die wir *Elementarmagnete* nennen.
- Diese Elementarmagnete sind in ferromagnetischen Stoffen soweit beweglich, dass sich unter der Wirkung eines äußeren Permanentmagneten alle in einer Richtung ausrichten. Dadurch wird der ferromagnetische Körper selbst zum Magneten.
- Im allgemeinen verliert ein ferromagnetischer Stoff diese Ausrichtung der Elementarmagnete und damit seine magnetische Wirkung.
- Wenn es gelingt, diese Ausrichtung zu fixieren, hat man einen Permanentmagneten.

Bitte beachten Sie, dass es sich bei diesen Elementarmagneten nur um eine (sehr einfache) Modellvorstellung handelt, aufgrund derer man sich jedoch die oben genannten Eigenschaften erklären kann.

**c. Das magnetische Feld.** Wie beim elektrischen Feld definiert man auch das magnetische Feld als einen Zustand des Raumes, in dem Kräfte auf Magnete (Kompassnadeln) ausgeübt werden. Zur Festlegung der Richtung und Orientierung des magnetischen Feldes vereinbart man:

**Definition:** Die Richtung des magnetischen Feldes ist die Richtung der Kraftwirkung auf den Nordpol einer Kompassnadel.

Ein Feld kann man durch Feldlinien veranschaulichen; diese kann man sichtbar machen durch Eisenfeilspäne (kleine Eisenpartikel, die bei der Bearbeitung von Eisen abfallen), die sich im Magnetfeld ausrichten. Um auch die Orientierung des Feldes zu erkennen, muss man statt der Eisenfeilspäne kleine Kompassnadeln benutzen.

Bringt man eine Kompassnadel in das Feld eines Permanentmagneten, so wird sich der Nordpol der Kompassnadel vom Nordpol des Permanentmagneten weg und zum Südpol hin orientieren. Dies gibt dann gemäß obiger Definition die Richtung des Magnetfeldes an:

**Folgerung:** Die Richtung des Magnetfeldes eines Permanentmagneten verläuft von dessen Nord- zu dessen Südpol.

Will man wie beim elektrischen Feld nun auch beim magnetischen Feld die *Stärke* des Feldes definieren, so stößt man auf das Problem, dass es keine magnetische „Substanz“ gibt, weil es keine magnetischen Mono-Pole gibt. Man muss also zur Feldstärkdefinition andere Bezugsobjekte heranziehen. Dazu benötigen wir die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.

## 7. Elektrizität und Magnetismus.

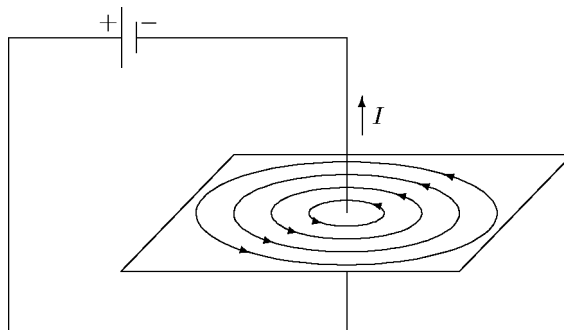
**a. Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.** Im Jahre 1820 entdeckte der dänische Physiker *Oersted*, dass auch elektrischer Strom magnetische Wirkung hat.

Jeder stromdurchflossene Leiter erzeugt um sich ein magnetisches Feld. Die Feldlinien verlaufen in Ebenen senkrecht zum Leiter in konzentrischen Kreisen um den Leiter herum.

Die Richtung des Feldes wird durch die Rechte-Hand-Regel beschrieben:

Weist der Daumen der rechten Hand in Richtung des Stromes (d. i. die Bewegungsrichtung von positiven Ladungen, also vom Pluspol zum Minuspol), so geben die gekrümmten übrigen Finger die Richtung des Magnetfeldes an.

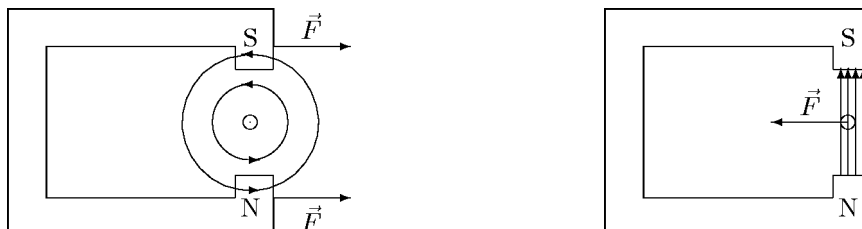
Die folgende Skizze veranschaulicht dies:



Eine wichtige Folge dieser Tatsache ist, dass stromdurchflossene Leiter in Magnetfeldern Kräfte erfahren. Wir wollen dies etwas genauer untersuchen. Wir betrachten dazu einen Hufeisenmagneten, in dessen Magnetfeld ein Leiter senkrecht zu den Feldlinien verläuft. Der kleine

Kreis stellt einen Querschnitt durch den Leiter dar. Dabei wird die Stromrichtung durch einen Punkt gekennzeichnet; dies soll bedeuten, dass der Strom aus der Zeichenebene heraus dem Betrachter entgegenkommt.

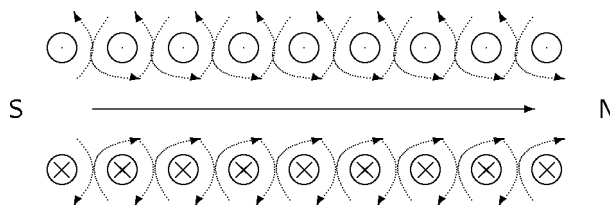
Die konzentrischen Kreise im linken Bild geben die Richtung des Magnetfeldes des Leiters an (gemäß der Rechte-Hand-Regel). Dieses Magnetfeld wirkt auf den Hufeisenmagneten, insbesondere auf die beiden Pole. Die Richtung der Kraft ist für den Nordpol gleich der Richtung des Feldes (gemäß der Definition der Feldrichtung), für den Südpol ist die Kraft dem Feld entgegengesetzt. Dadurch hat in beiden Fällen die Kraft dieselbe Richtung (nach rechts).



Nach Newtons *actio = reactio* übt nicht nur der Leiter eine Kraft auf den Magneten aus, sondern umgekehrt der Magnet die gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Leiter (siehe rechtes Bild). In der rechten Skizze sind nun die Feldlinien des Hufeisenmagneten und die Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter sowie die Stromrichtung angegeben. Man erkennt die Gültigkeit der folgenden

**Dreifingerregel:** In einem Magnetfeld erfährt ein stromdurchflossener Leiter eine Kraft, die sowohl zum Leiter als auch zum Magnetfeld senkrecht gerichtet ist. Für die Orientierung gilt:  
 Weist der Daumen der rechten Hand in die Stromrichtung und der Zeigefinger in die Richtung des Magnetfeldes, so gibt der abgespreizte Mittelfinger die Richtung der Kraft an.

**b. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule.** Um die magnetische Wirkung zu verstärken, wickelt man den stromführenden Leiter zu einer Spule zusammen. Das nachfolgende Bild zeigt einen Längsschnitt durch eine solche Spule. Die kleinen Kreise symbolisieren Querschnitte durch den Leiter. Dabei wird die Stromrichtung durch ein Kreuz (in die Zeichenebene hinein) oder durch einen Punkt (aus der Zeichenebene heraus) gekennzeichnet. Dies ist die übliche Kennzeichnung für Vektoren senkrecht zur Zeichenebene; das Kreuz soll einen Pfeil von hinten mit gekreuzten Federn und der Punkt die Spitze des Pfeils symbolisieren.



Die gekrümmten Pfeile kennzeichnen die Feldrichtung des Magnetfeldes für jeden einzelnen Drahtquerschnitt gemäß der auf S. 20 formulierten Rechte-Hand-Regel. Man beachte, dass in den Zwischenräumen zwischen den einzelnen Drähten die Magnetfelder einander entgegengesetzt verlaufen und sich so aufheben. Im Innern der Spule hingegen verlaufen alle Feldlinien in der gleichen Richtung. Dadurch ergibt sich eine Verstärkung des Magnetfeldes in der Richtung des langen Pfeils und an den Enden der Spule entstehen so zwei Pole (Orte stärkster Kraftwirkung). Welcher Art die Pole sind, ergibt sich aus der Richtung des Feldes: Am rechten Ende wird sich



eine Kompassnadel gemäß der Feldrichtung von der Spule weg nach außen ausrichten, dort liegt also der Nordpol der Spule. Es gilt also für die magnetischen Pole einer Spule die folgende Regel:

Zeigen die gekrümmten Finger der rechten Hand in die Stromrichtung einer Spule, so gibt der Daumen die Richtung des Magnetfeldes in der Spule an.

Eine stromdurchflossene Spule verhält sich insgesamt wie ein kräftiger Stabmagnet mit den Polen wie soeben beschrieben.

**c. Anwendungen.** Hier sollen nur kurz einige Anwendungen aufgezählt werden, wie wir sie im Unterricht besprochen haben.

**1. Elektromagnet:** Mit einer stromdurchflossenen Spule wie oben beschrieben hat man einen *Elektromagneten*. Er ist ein- und ausschaltbar und in seiner Stärke veränderbar. Elektromagnete können benutzt werden, um (selbst schwere) ferromagnetische Stoffe zu heben, wie dies etwa auf Schrottplätzen oder bei der Eisen-/Stahlverarbeitung genutzt wird. Man benutzt Elektromagnete auch zur Herstellung von Permanentmagneten, indem man ferromagnetisches Material erhitzt und beim Erkalten dem Magnetfeld eines starken Elektromagneten aussetzt. In vielen alltäglichen Anwendungen werden Elektromagnete genutzt (Türklingel, Gong, Türöffner, Sicherungsautomaten, Lautsprecher).

**2. Drehspulmessgeräte:** Man hängt eine *Spule drehbar* in das Magnetfeld eines Permanentmagneten. Drehachse, Spulenchse und die Richtung des Magnetfeldes des *Permanentmagneten* sind jeweils senkrecht zueinander ausgerichtet. Wird nun die Spule von einem Strom durchflossen, so wird sie selbst zu einem Magneten und richtet sich entsprechend der Richtung des äußeren Magnetfeldes aus. Die Drehung der Spule wird durch eine *Rückstellfeder* begrenzt und durch einen *Zeiger* auf einer *Skala* angezeigt. Auf diese Weise kann man Ströme messen.

**3. Elektromotor:** Der Grundaufbau ist wie beim Messgerät, nur dass hier keine Rückstellfeder die Bewegung begrenzt, sondern dass im Gegenteil durch regelmäßige *Umpolung* des Stromes die Spule sich immer wieder neu ausrichtet und so die Bewegung ständig weitergeht. Man hat so einen *Motor*.

## 8. Magnetische Feldstärke und die magnetische Feldgleichung.

**a. Die magnetische Flussdichte.** Wir wollen nun wie beim elektrischen Feld die Stärke eines Magnetfeldes definieren. Diese *magnetische Feldstärke* wird aus historischen Gründen *magnetische Flussdichte* genannt und mit dem Symbol  $\vec{B}$  gekennzeichnet. [Bei der elektromagnetischen Induktion werden wir den magnetischen Fluss kennenlernen, dessen ‘Dichte’ dann die hier definierte Flussdichte ist.] Die Flussdichte ist ein Vektor, dessen Richtung die Richtung des Magnetfeldes ist, wie wir sie oben definiert haben.

Um nun den Betrag  $B$  der Flussdichte zu definieren, geht man im Prinzip genauso vor wie beim elektrischen Feld: Man will die Stärke des Feldes durch die Stärke der Kraftwirkung auf einen Probemagneten, etwa auf eine Kompassnadel, definieren. Aber wie schon erwähnt fehlt hier ein Analogon zur elektrischen Ladung, da es keine ‘magnetische Substanz’ gibt. Man benutzt daher statt der Kompassnadeln einen stromdurchflossenen Leiter als ‘Probemagneten’.

Um also die Stärke eines Magnetfeldes zu definieren, bringt man einen stromdurchflossenen Leiter in dieses Magnetfeld, und zwar im rechten Winkel dazu. Dieser stromdurchflossene Leiter erfährt dann eine Kraft  $F$ . Man stellt fest, dass diese Kraft bei unverändertem äußerem Magnetfeld proportional zur Stromstärke  $I$  und zur Länge  $l$  des Leiters ist. Der Proportionalitätsfaktor ist dann ein Maß für die Stärke des umgebenden magnetischen Feldes und definiert

die magnetische Flussdichte  $B$ :

**Definition:** Die magnetische Flussdichte  $B$  eines Magnetfeldes wird definiert als

$$B = \frac{F}{Il}, \quad \text{Einheit Tesla: } 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}}.$$

Dabei ist  $F$  die Kraft, die das Magnetfeld auf einen senkrecht dazu verlaufenden Leiter der Länge  $l$  ausübt, der von einem Strom der Stärke  $I$  durchflossen wird.

Warnung: Anders als beim elektrischen Feld ist die Richtung  $\vec{B}$  des Feldes *nicht* die Richtung der Kraft! Vielmehr ist nach der Dreifingerregel (siehe S. 21) die Kraft  $\vec{F}$  senkrecht sowohl zur Stromrichtung als auch zum Magnetfeld  $\vec{B}$ .

Zur Messung der magnetischen Flussdichte benutzt man nicht die Definition, sondern einen anderen Effekt des Magnetfeldes, den sog. *Halleffekt*, den wir im Zusammenhang mit der Lorentzkraft behandeln werden (Abschnitt 9.)

**b. Die magnetische Feldgleichung.** Die magnetische Flussdichte ist definiert als ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes. Dabei ist man genauso vorgegangen wie beim elektrischen Feld, man hat die Stärke des Feldes über seine *Wirkung* festgelegt. Man könnte aber auch versuchen ein Feld über seine *Ursache* zu erfassen. Beim elektrischen Feld betrachtete man dazu das homogene Feld eines Plattenkondensators, erzeugt von der Ladung  $Q$  auf Platten der Fläche  $A$ . Man wurde so zur elektrischen Feldgleichung  $E \sim \frac{Q}{A}$ , bzw.  $\epsilon_0 E = \frac{Q}{A}$  geführt.

Beim Magnetismus erzeugt man ein homogenes Feld im Innern einer *schlanken* Spule, das ist eine Spule, deren Länge  $l$  groß ist im Vergleich zum Querschnitt. Die Flussdichte des Feldes im Innern der Spule hängt ab von der Stromstärke  $I$  in der Spule, der Anzahl  $n$  der Windungen sowie der Länge  $l$  der Spule, und zwar gilt die

**Magnetische Feldgleichung:** Die magnetische Flussdichte im Innern einer stromdurchflossenen schlanken Spule ist proportional zur Stromstärke  $I$  und Windungszahl  $n$  sowie umgekehrt proportional zur Länge  $l$ :

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{n}{l}, \quad \mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \text{ magnetische Feldkonstante.}$$

Diese Feldgleichung gilt in der angegebenen Form für das Vakuum bzw. näherungsweise in Luft. Man stellt nun fest, dass man die magnetische Wirkung einer Spule stark erhöhen kann, wenn man das Innere der Spule mit einem ferromagnetischen Stoff ausfüllt. Dann wird dieser durch das Spulenfeld magnetisiert und verstärkt so das magnetische Feld. Der Faktor, um den sich das Feld verstärkt, wird *Permeabilitätszahl* des in die Spule eingeführten Materials genannt und mit  $\mu_r$  bezeichnet. Die Feldgleichung lautet dann

$$\text{Magnetische Feldgleichung: } B = \mu_0 \mu_r \cdot I \cdot \frac{n}{l}.$$

Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  ist also ein Analogon zur Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  beim elektrischen Feld. Beachten Sie jedoch einen wichtigen Unterschied: Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  gab an, um welchen Faktor die Kapazität eines Kondensators durch ein Dielektrikum steigt, sie ist also proportional zur Kapazität eines Kondensators ( $C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ). Dies bedeutete dann aber, dass das Feld in einem geladenen, von der Spannungsquelle getrennten Kondensator *umgekehrt proportional* zu  $\epsilon_r$  ist:

$$\epsilon_r \epsilon_0 E = \frac{Q}{A} \iff E = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{\epsilon_0 A}.$$

Ein Dielektrikum *schwächt* das elektrische Feld in einem isolierten geladenen Kondensator. Dagegen ist das Magnetfeld in einer Spule *proportional* zur Permeabilitätszahl  $\mu_r$  und wird durch einen ferromagnetischen Kern *verstärkt*.

Diese Verstärkung kann beträchtlich sein. Hier eine kleine Tabelle mit Werten von  $\mu_r$  (Maximalwerte):

Material	$\mu_r$
Gusseisen (2–4% C)	800
Flusstahl (unter 0,1% C)	4000
Transformatorblech mit Si	8000
Permalloy (75% Ni; Rest: Fe, Cu, Mo, Cr)	300000

## 9. Bewegte Ladung im Magnetfeld.

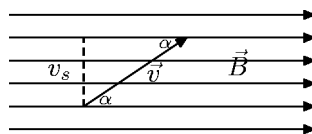
**a. Die Lorentzkraft.** Wir haben oben gesehen, dass ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld eine Kraft erfährt. Für diese Kraft ist der Leiter selbst unwichtig, die Kraft wirkt auf die bewegte Ladung selbst. Diese Kraft eines Magnetfeldes auf eine bewegte Ladung  $q$  wird *Lorentzkraft*<sup>1)</sup> genannt. Wir wollen diese nun in unmittelbarer Abhängigkeit von der bewegten Ladung beschreiben. Sei dazu  $q$  die Ladungsmenge, die sich im Leiterabschnitt der Länge  $l$  bewegt und auf die die magnetische Feldkraft  $F = BIl$  wirkt. (Der Leiter verlaufe senkrecht zum Magnetfeld.) Wenn  $t$  die Zeit ist, die ein Elektron zur Durchquerung des Leiterabschnittes benötigt, so ist in der Zeit  $t$  gerade die Ladungsmenge  $q$  in den Leiterabschnitt hineingeströmt, also ist die Stromstärke  $I = \frac{q}{t}$  und damit gilt für die gesamte Kraft auf den Leiterabschnitt

$$F = B \cdot Il = B \cdot \frac{q}{t} \cdot l = B \cdot q \cdot \frac{l}{t} = B \cdot q \cdot v.$$

Gemäß der Definition von  $t$  ist  $v = \frac{l}{t}$  gerade die Geschwindigkeit, mit der die Ladung durch den Leiter fließt. Wir erhalten so die folgende Beschreibung der

**Lorentzkraft** :  $F_L = qvB$ , wenn  $\vec{v} \perp \vec{B}$

wobei  $q$  die bewegte Ladung,  $v$  die Geschwindigkeit der Ladung *senkrecht* zum Magnetfeld und  $B$  die magnetische Flussdichte ist. Ist die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  nicht senkrecht zu  $\vec{B}$ , so muss man die Geschwindigkeitskomponente  $v_s$  senkrecht zu  $\vec{B}$  ermitteln. Ist  $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{B})$ , so gilt  $v_s = v \sin \alpha$ .



Also erhalten wir die allgemeinere Formel für die Lorentzkraft:

**Betrag der Lorentzkraft** :  $F_L = qvB \sin \alpha$  mit  $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{B})$ .

Beachten Sie: Bewegt sich die Ladung in Richtung des Magnetfeldes ( $\alpha = 0$ ), so verschwindet die Lorentzkraft!

Die Richtung der Lorentzkraft ist immer senkrecht zu  $\vec{v}$  und zu  $\vec{B}$ :

**Richtung der Lorentzkraft:**  $\vec{F}_L \perp \vec{v}, \vec{B}$ .

<sup>1)</sup> H. A. Lorentz (1853–1928), holländischer Physiker, Nobelpreis für Physik 1902

Die Orientierung von  $\vec{F}_L$  wird durch die Dreifingerregel der rechten Hand angegeben. Die früher genannte Stromrichtung wird hier durch die Bewegungsrichtung einer *positiven* Ladung angegeben:

**Orientierung der Lorentzkraft (Dreifingerregel):**

Weist der Daumen der rechten Hand in die Bewegungsrichtung einer *positiven* Ladung und der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes, so gibt der Mittelfinger die Orientierung der Lorentzkraft  $F_L$  an.

Diese drei Angaben zur Festlegung der Lorentzkraft (Betrag, Richtung, Orientierung) entsprechen genau der Definition des *Vektorproduktes*  $\vec{v} \times \vec{B}$  zweier Vektoren des dreidimensionalen Raumes. Diese besagt:

**Vektorprodukt:** Das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  des dreidimensionalen Raumes ist der Vektor  $\vec{w}$  mit:

1. die Länge von  $\vec{w}$  ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  aufgespannten Parallelogramms:  $|\vec{w}| = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cdot \sin \alpha$ ,  $\alpha = \angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ , insbesondere ist  $\vec{w} = \vec{0}$ , wenn die Vektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  linear abhängig sind,
2.  $\vec{w}$  ist orthogonal zu beiden Vektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ,
3. die Vektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w}$  bilden ein positiv orientiertes (rechtshändiges) Orthogonalsystem.

Im dreidimensionalen Raum gibt es nur einen Vektor  $\vec{w}$  mit diesen 3 Eigenschaften.

Man kann also die Lorentzkraft als Vektorprodukt von  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  multipliziert mit dem Skalar  $q$  beschreiben:

$$\text{Lorentzkraft: } \vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

**b. Lorentzkraft und Kreisbewegung.** Wir betrachten eine Ladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in einem Magnetfeld der Flussdichte  $\vec{B}$  bewegt. Wir zerlegen  $\vec{v}$  in zwei Komponenten,  $\vec{v}_B$  in Richtung von  $\vec{B}$  und  $\vec{v}_n$  senkrecht zu  $\vec{B}$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_B \quad \text{mit } \vec{v}_n \perp \vec{v}_B \parallel \vec{B}.$$

Dann wirkt auf die Ladung die Lorentzkraft  $F_L$ . Da diese stets im rechten Winkel zu  $\vec{v}$  wirkt, wird nur die Bewegungsrichtung der Ladung abgelenkt, der Betrag der Geschwindigkeit  $v$  ändert sich nicht. Aber auch der Betrag der Lorentzkraft ändert sich nicht: Zunächst gilt

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot (\vec{v}_n + \vec{v}_B) \times \vec{B} = q \cdot \vec{v}_n \times \vec{B},$$

denn  $\vec{v}_B \times \vec{B} = \vec{0}$ . Dies zeigt, dass  $\vec{F}_L$  auch senkrecht zu  $\vec{v}_n$  ist, so dass unter der Wirkung der Lorentzkraft auch die Geschwindigkeitskomponente  $\vec{v}_n$  nur die Richtung, nicht aber den Betrag ändert. Folglich ist auch der Betrag der Lorentzkraft  $F_L = qv_n B$  unverändert:

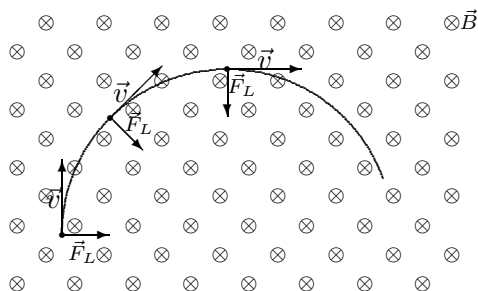
Auf eine bewegte Ladung in einem Magnetfeld wirkt eine betraglich konstante Kraft ständig im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung.

Dieses Phänomen kennen wir von gleichförmigen Kreisbewegungen: Die Radialkraft ist konstant und immer im rechten Winkel zur Kreisbahn, da immer zum Bahnzentrum gerichtet. Man könnte daher vermuten, dass umgekehrt bei einer konstanten Kraft im rechten Winkel zur Bahn eine gleichförmige Kreisbewegung vorliegen muss. *Dies ist aber nur richtig, wenn die Bahn in einer Ebene verläuft!*

Nun kann die Bahn aber nur dann in einer Ebene verlaufen, wenn Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor stets in einer Ebene liegen. Die Richtung der Beschleunigung ist die Richtung der Lorentzkraft und diese ist stets senkrecht zum Magnetfeld  $\vec{B}$ , verläuft also stets in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{B}$ . Wenn nun auch die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  senkrecht zum Magnetfeld ist:  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , dann bleibt die Ladung immer in dieser Ebene:

Tritt eine elektrische Ladung senkrecht in ein Magnetfeld ein, so bleibt ihre Bahn in einer Ebene; diese ist senkrecht zum Magnetfeld.

Die Skizze veranschaulicht die Situation für eine negative Ladung (etwa ein Elektron) und ein in die Zeichenebene hinein orientiertes Magnetfeld.



Die Bahn der Ladung verläuft stets in der Zeichenebene und eine konstante Kraft wirkt stets im rechten Winkel. Diese Eigenschaften treffen insbesondere auf gleichförmige Kreisbewegungen zu. Aber es gilt schärfer: Sie treffen *nur* auf gleichförmige Kreisbewegungen zu:

**Dynamische Charakterisierung gleichförmiger Kreisbewegungen:**  
Bewegt sich ein Körper in einer Ebene und ist die einwirkende Kraft betraglich konstant und stets im rechten Winkel zur Bahn, so liegt notwendig eine gleichförmige Kreisbewegung vor.

So einleuchtend dieses Resultat auch erscheinen mag, es ist nicht selbstverständlich. So ist es ohne die Voraussetzung einer ebenen Bahn falsch! Auch ist nicht unmittelbar einsehbar, dass die Kräfte alle auf ein und denselben Punkt gerichtet sein müssen. Die notwendige Begründung dieses wichtigen Resultates wollen wir später (Abschnitt 11. Differentialgleichungen in der Physik) nachholen.

Zusammenfassend erhalten wir so das folgende wichtige Resultat:

**Ladungen auf Kreisbahnen im Magnetfeld:**  
Bewegt sich eine Ladung *senkrecht* in ein homogenes Magnetfeld, so liegt eine gleichförmige Kreisbewegung vor.

Den Radius dieser Kreisbahn kann man dann mit schon bekannten Mitteln bestimmen. Für eine gleichförmige Kreisbewegung ist eine Zentripetalkraft  $F_z = ma_z = m\frac{v^2}{r}$  notwendig. Diese wird hier von der Lorentzkraft  $F_L = qvB$  (man beachte  $\vec{v} \perp \vec{B}$ !) aufgebracht. Also gilt

$$m\frac{v^2}{r} = qvB \iff mv = qrB,$$

woraus sich  $r$  bestimmen lässt.

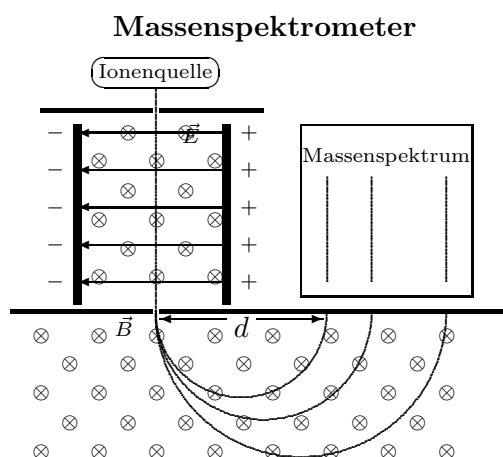
**Problem:** Welche Bahn erhält man, wenn die Voraussetzung  $\vec{v} \perp \vec{B}$  nicht erfüllt ist?

Tip zur Lösung: Zerlegen Sie wie oben  $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_B$  und betrachten Sie die Bewegung der Ladung als Überlagerung zweier Bewegungen, einer Bewegung in Richtung von  $\vec{B}$  (welcher Art ist diese?) und einer Bewegung in der Ebene senkrecht dazu.

**c. Geschwindigkeitsfilter und Massenbestimmung.** Die oben hergeleitete Beziehung  $mv = qrB$  für die Kreisbahn einer elektrischen Ladung in einem Magnetfeld ist ein wichtiger Ansatz zur Bestimmung atomarer Größen. So lässt sich die Masse von geladenen Teilchen (Protonen, Elektronen, Ionen) bestimmen, indem man sie in einem elektrischen Feld beschleunigt und dann senkrecht in ein Magnetfeld ‘schießt’. Man bestimmt dann den Bahnradius  $r$  im Magnetfeld und berechnet daraus  $m$  – vorausgesetzt alle anderen Größen sind bekannt. Die Flussdichte  $B$  ist messbar, die Ladung  $q$  ist in der Regel ein kleines Vielfaches der Elementarladung und bekannt. Das Problem ist die Geschwindigkeit der Teilchen.

Nun kann man bekanntlich aus der Beschleunigungsspannung  $U_a$  aufgrund der Energieerhaltung die Geschwindigkeit einer Ladung ermitteln:  $qU_a = \frac{mv^2}{2}$ . Aber dafür müsste die Masse, die ja erst bestimmt werden soll, bekannt sein. Dennoch kann man diesen Ansatz nutzen, und zwar zur Bestimmung der sog. spezifischen Ladung  $\frac{q}{m}$  von Elementarteilchen (siehe Übung (E10), Aufgabe 4).

Wir wollen nun eine erweiterte Versuchsanordnung zur Massenbestimmung kennenlernen, das *Massenspektrometer*. Dem Magnetfeld mit den Kreisbahnen der Ionen (unten im Bild) wird ein Kondensator in der dargestellten Orientierung vorangeschaltet. Im Kondensator herrscht ein elektrisches Feld im rechten Winkel zum Magnetfeld. Man spricht von gekreuzten Feldern. In diesen Bereich werden nun aus einer Ionenquelle Ionen (elektrisch geladene Atome) ‘geschossen’.



Nun können nur solche Teilchen den Kondensator verlassen, die genau geradlinig hindurchfliegen. Damit dies geschieht, müssen diese Teilchen im Kondensator kräftefrei sein, die wirkende Kraft des elektrischen Feldes  $\vec{F}_{el}$  muss der Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  entgegen gerichtet und gleich groß sein. Die eingezeichnete Orientierung der Felder sichert, dass die Kräfte einander entgegen wirken: Bei positiver Ladung  $q$  wirkt die elektrische Feldkraft nach links, die Lorentzkraft gemäß der Dreifingerregel nach rechts (Daumen in Bewegungsrichtung nach unten, Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes nach hinten und Mittelfinger in Richtung der Lorentzkraft nach rechts). [Bei einer negativen Ladung  $q$  sind beide Kräfte umgekehrt gerichtet, also wieder einander entgegengesetzt.] Eine geradlinige Bahn erhält man also genau dann, wenn beide Kräfte gleich stark sind:

$$F_{el} = F_L \iff qE = qvB \iff v = \frac{E}{B}.$$

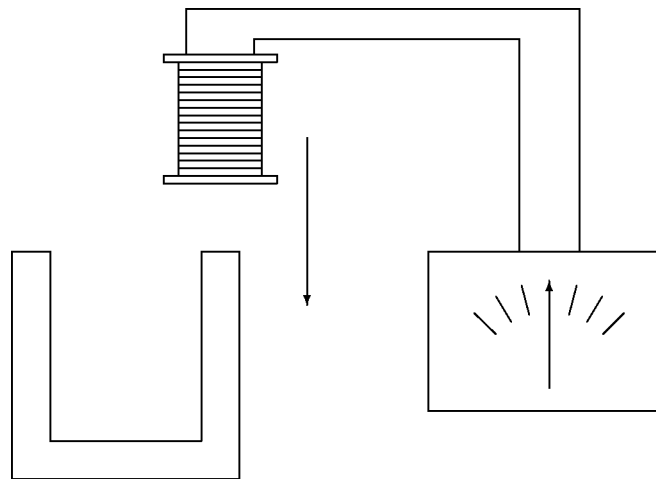
Die gekreuzten Felder wirken also wie ein Geschwindigkeitsfilter: Nur Teilchen mit der bestimmten Geschwindigkeit  $v = \frac{E}{B}$  können diesen Bereich geradlinig durchfliegen, alle anderen werden abgelenkt und erreichen nicht die Austrittsöffnung. Da  $E$  und  $B$  leicht messbar sind, ist damit auch die Geschwindigkeit der in den unteren Bereich eintretenden Ionen bestimmt. Nun kann man wie oben schon erläutert aus dem Bahndurchmesser  $d = 2r$  und der nun bekannten Geschwindigkeit  $v$  die Masse der Teilchen ermitteln:

$$v = \frac{E}{B} \quad \text{und} \quad mv = qrB \implies m = \frac{qrB^2}{E}.$$

## 10. Elektromagnetische Induktion.

**a. Bewegung induziert Spannung.** Bei den Anwendungen der magnetischen Wirkung des elektrischen Stromes haben wir auch den Elektromotor besprochen (s. S. 22). Sein Grundprinzip beruhte auf der Tatsache: Fließt durch eine in einem Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule ein Strom, so richtet sich die Spule im Magnetfeld aus und dreht sich. In einem Elektromotor wird also elektrischer Strom in Bewegungsenergie umgesetzt.

Die elektromagnetische Induktion ist der entgegengesetzte Vorgang: Bewegungsenergie wird in elektrische Spannung umgewandelt. Wir haben dies in einfacher Weise demonstrieren können. Eine Leiterschleife wird an ein empfindliches Spannungsmessgerät angeschlossen und dann durch das Feld eines Hufeisenmagneten bewegt. Wir beobachteten einen (sehr schwachen) Ausschlag des Messgerätes. Dieser Ausschlag wurde ein wenig verstärkt, wenn man die Leiterschleife in mehrere Windungen zusammenlegte. Ersetzte man die Leiterschleife durch eine Spule mit vielen Windungen und bewegte diese in das Magnetfeld hinein oder heraus, so erhielt man einen beachtlichen Spannungsausschlag. Der Ausschlag war umso stärker, je mehr Windungen die Spule

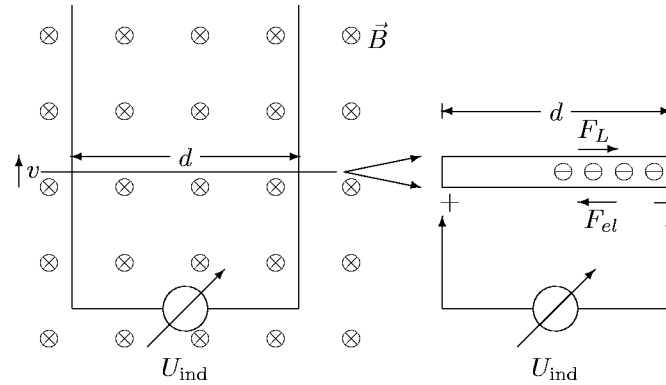


enthält. Auch durch die Geschwindigkeit konnte man die Spannung erhöhen. Außerdem registrierten wir bei entgegengesetzten Bewegungen (zum Magneten hin oder davon weg) Ausschläge in unterschiedlichen Richtungen, also Spannungen mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Dieses Phänomen nennt man *elektromagnetische Induktion*. Die im Messgerät nachgewiesene Spannung ist die sog. *Induktionsspannung*  $U_{\text{ind}}$ . Diese Induktionsspannung ist proportional zur Windungszahl  $n$  der Spule. Dies erklärt sich dadurch, dass eine Spule mit  $n$  Windungen eine Reihenschaltung von  $n$  Leiterschleifen ist. Dadurch addieren sich die in jeder einzelnen Windung induzierten Spannungen zur Gesamtspannung und diese ist dadurch proportional zur Windungszahl.

Wir wollen nun das Phänomen der Induktion auf der Basis der Lorentzkraft erklären und damit die Gesetzmäßigkeiten herleiten. Aufgrund unserer Vorüberlegung ist  $U_{\text{ind}} \sim n$  und es genügt, den Fall einer Leiterschleife ( $n = 1$ ) zu untersuchen. Die Leiterschleife wird dabei (siehe nachfolgende Skizze) realisiert durch einen Leiter, der mit der Geschwindigkeit  $v$  über Kontaktbahnen gleitet. Die Bewegung erfolgt im rechten Winkel zum Magnetfeld. Der bewegte Leiter ist daneben noch einmal vergrößert dargestellt. Durch die Bewegung des Leiters werden auch die darin enthaltenen Elektronen bewegt. Also wirkt auf sie die Lorentzkraft, und zwar in der eingezeichneten Richtung (Daumen nach unten in Bewegungsrichtung *positiver* Ladungen, Zeigefinger nach hinten in Richtung des Magnetfeldes, Mittelfinger nach rechts in Richtung der Lorentzkraft). Da in einem Leiter Elektronen frei beweglich sind, verschiebt die Lorentzkraft die Elektronen nach rechts; es erfolgt eine Ladungstrennung und es entsteht eine Spannung mit der

angegebenen Polung (rechts  $-$ , links  $+$ ).



Die Größe der Spannung hängt von der Größe der Ladungstrennung ab. Es stellt sich also die Frage: Wieviele Elektronen werden nach rechts verschoben? Die Lorentzkraft wirkt zwar auf alle freien Elektronen, aber es wandern nicht alle Elektronen nach rechts. Warum ist dies nicht der Fall? Durch die nach rechts abdriftenden Elektronen entsteht links ein Mangel an Elektronen, also ein positiver Ladungsüberschuss (wie schon in der Skizze angedeutet) und damit ein elektrisches Feld. Dieses elektrische Feld übt nun ebenfalls Kräfte auf Ladungen aus; auf die Elektronen wirkt die elektrische Feldkraft  $F_{el}$  nach links. Die Ladungsverschiebung kommt also zu einem stabilen Zustand, wenn diese beiden einander entgegengesetzten Kräfte gleich groß sind. Die nach rechts wirkende Lorentzkraft ist  $F_L = ev_n B$ , wobei  $v_n$  die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld ist. Die nach links wirkende elektrische Feldkraft ist  $F_{el} = eE = e \cdot \frac{U_{ind}}{d}$ , wenn  $d$  der Abstand der Messpunkte ist (wie eingezeichnet). Damit ergibt sich für die induzierte Spannung in einer Leiterschleife (betragslich):

$$F_{el} = F_L \iff ev_n B = eE = e \cdot \frac{U_{ind}}{d} \iff U_{ind} = B \cdot v_n d.$$

Dieses Ergebnis wollen wir etwas umformulieren. Es ist

$$v_n d = \frac{\Delta s_n}{\Delta t} \cdot d = \frac{\Delta s_n \cdot d}{\Delta t},$$

wobei hier und im Folgenden der Index  $(\dots)_n$  jeweils bedeutet, dass die Komponente *senkrecht* zum Magnetfeld genommen wird. Der Zähler des letzten Bruches  $\Delta s_n \cdot d$  ist eine Fläche, und zwar die Fläche  $\Delta A_n$ , um die in der Zeit  $\Delta t$  die von der Leiterschleife umschlossene senkrechte Querschnittsfläche  $A_n$  des Magnetfeldes verändert wurde. Damit ist die Größe  $v_n d = \frac{\Delta A_n}{\Delta t}$  ein Maß für die Änderungsrate der von der Spule eingeschlossenen Fläche des Magnetfeldes, senkrecht zu  $\vec{B}$  gemessen. Dies ergibt für die induzierte Spannung

$$U_{ind} = B \frac{\Delta A_n}{\Delta t}.$$

Wir erhalten so eine erste (vorläufige) Fassung des Induktionsgesetzes:

**Induktionsgesetz:** (1. Version)

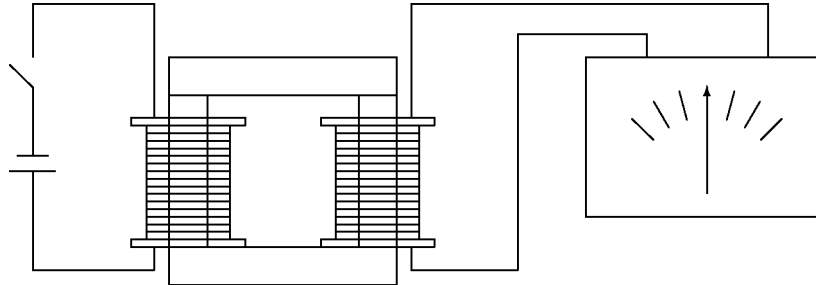
Bewegt sich eine Spule mit  $n$  Windungen in einem Magnetfeld, so wird an den Enden eine Spannung induziert; deren Betrag ist

$$U_{ind} = nB \frac{\Delta A_n}{\Delta t}$$

wobei  $\Delta A_n$  die in der Zeit  $\Delta t$  erfolgte Änderung der senkrecht zum Magnetfeld gemessenen von der Spule umschlossenen Fläche des Magnetfeldes ist.



**b. Induktion ohne Bewegung, der magnetische Fluss.** Man kann aber auch Induktionsphänomene beobachten, in denen keine mechanische Bewegung auftritt. Wir setzen zwei Spulen auf einen gemeinsamen Eisenkern (siehe Skizze). Die linke Spule ist mit einer Stromquelle verbunden und bei fließendem Strom erzeugt sie ein Magnetfeld. Sie wird *Primär-* oder *Feldspule* genannt. Das Magnetfeld durchsetzt den gesamten Eisenkernring, also auch die rechte Spule, an die nur ein Spannungsmesser angeschlossen ist. Diese Spule wird *Sekundär-* oder *Induktionsspule* genannt.



Das Messgerät zeigt jedoch keinerlei Spannung an, weder bei fließendem, noch bei ausgeschaltetem Strom. Allerdings konnten wir im Unterricht beobachten, dass im Moment des *Ein-* oder *Ausschaltens* eine Spannung induziert wurde. Die Ausschläge waren dabei entgegengesetzt. Wir haben sodann das Ein- und Ausschalten ersetzt durch eine regelbare Spannungsquelle, mit der wir den Strom in der linken Spule ändern konnten. Bei jeglicher Änderung konnten wir eine induzierte Spannung in der rechten Spule beobachten. Diese war um so größer, je schneller die Änderung erfolgte, und ihr Vorzeichen hing davon ab, ob der Stromfluss zu- oder abnahm. Auch eine generelle Umpolung (links oder rechts) änderte das Vorzeichen der Spannung.

Wir folgern daraus, dass offenbar immer dann eine Spannung an den Enden der rechten Spule induziert wird, wenn sich das Magnetfeld in der rechten Spule *ändert*. Induktion tritt also nicht nur bei Bewegung und der damit verbundenen Änderung der Fläche  $A_n$  auf, vielmehr kann auch die Änderung der magnetischen Flussdichte  $B$  eine Induktionsspannung erzeugen. Beide Phänomene kann man zusammenfassen, indem man im vorläufigen Induktionsgesetz  $B \cdot \Delta A_n$  (gültig für konstantes  $B$ ) ersetzt durch die Änderung  $\Delta(BA_n)$  des Produktes:

$$U_{\text{ind}} = n \frac{\Delta(BA_n)}{\Delta t}.$$

Es liegt daher nahe das Produkt  $BA_n$  als neue physikalische Größe einzuführen. Man definiert den *magnetischen Fluss* durch ein Flächenstück

$$\Phi = B \cdot A_n$$

als das Produkt aus der Flussdichte  $B$  und der Fläche  $A_n$  senkrecht zum Magnetfeld. Mit dieser Definition des magnetischen Flusses nimmt unser Induktionsgesetz die folgende Form an:

**Induktionsgesetz: (2. Version)**

Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Spule mit  $n$  Windungen, so wird an den Enden eine Spannung induziert; deren Betrag ist

$$U_{\text{ind}} = n \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

wobei  $\Delta\Phi$  die in der Zeit  $\Delta t$  erfolgte Änderung des magnetischen Flusses durch den Querschnitt der Spule ist.

Ist die Änderungsrate  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  des magnetischen Flusses nicht konstant, so muss man von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate übergehen; man ersetzt  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  durch die zeitliche Ableitung

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dot{\Phi}.$$

Die zeitliche Ableitung einer Funktion wird in der Physik üblicherweise mit einem darübergesetzten Punkt (lesen Sie ‘ $\Phi$  Punkt’) statt mit dem Ableitungsstrich ( $\Phi'$ ) bezeichnet. In der Mathematik würde man  $\Phi(t)$  statt  $\Phi$  schreiben und für die zeitliche Ableitung  $\Phi'(t)$  statt  $\dot{\Phi}$ . Man erhält so eine weitere Version des Induktionsgesetzes

**Induktionsgesetz: (3. Version)**

Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Spule mit  $n$  Windungen, so wird an den Enden eine Spannung induziert. Ihr Betrag ist das Produkt aus Windungszahl  $n$  und der zeitlichen Änderungsrate  $\dot{\Phi}$  des magnetischen Flusses durch den Spulenquerschnitt:

$$U_{\text{ind}} = n \cdot \dot{\Phi}.$$

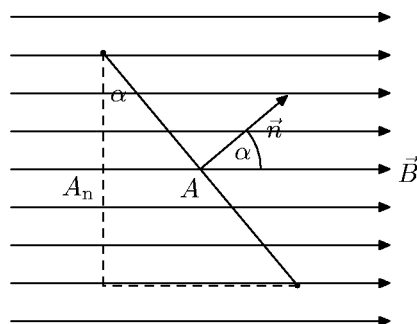
**c. Das allgemeine Induktionsgesetz.** Bei den bisherigen Versionen des Induktionsgesetzes haben wir nur den Betrag der Induktionsspannung bestimmt. Wir haben aber bei den Demonstrationen (Abschnitte a. und b.) gesehen, dass sich das Vorzeichen der Spannung ändert, wenn man die Bewegung, das Magnetfeld oder die Änderungsrichtung des Flusses (Zu- oder Abnahme) umkehrt. Wir wollen nun das allgemeine Induktionsgesetz formulieren, das eine Aussage über das Vorzeichen der Induktionsspannung beinhaltet.

Dazu benötigen wir zunächst die endgültige Definition des magnetischen Flusses mit einem Vorzeichen sowie einige ergänzende Überlegungen zum Spannungsbegriff (Vorzeichen der Spannung).

$\alpha$ ) *Vorzeichen des magnetischen Flusses.* Wir gehen aus von der obigen Definition  $\Phi = B \cdot A_n$  mit der Fläche  $A_n$  quer zum Magnetfeld. Diese Fläche berechnet man als  $A_n = A \cdot \cos \alpha$  mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen der Flussdichte  $\vec{B}$  und einer Normalen zur Fläche  $A$ . Wir kommen so zu

$$\Phi = B \cdot A_n = B \cdot A \cdot \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha = \angle(\vec{B}, \vec{n})$  der Winkel zwischen der Flussdichte  $\vec{B}$  und einem Normalenvektor  $\vec{n}$  zur Fläche ist. (Die Skizze zeigt einen Schnitt, in dem die Fläche  $A$  nur als Strecke erscheint.)



Bei dieser Definition hängt der magnetische Fluss  $\Phi$  nicht nur von dem Flächenstück und dessen Richtung, sondern auch von der *Orientierung* des gewählten Normalenvektors  $\vec{n}$  ab. Wählt man statt  $\vec{n}$  einen entgegengesetzt orientierten Normalenvektor  $\vec{n}'$  (etwa  $\vec{n}' = -\vec{n}$ ), so ändert sich der Winkel zu  $\alpha' = \angle(\vec{B}, \vec{n}') = \angle(\vec{B}, -\vec{n}) = 180^\circ - \alpha$  und der Kosinus  $\cos \alpha' = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  ändert das Vorzeichen.

Das Vorzeichen des magnetischen Flusses hängt vom gewählten Normalenvektor ab.

Die Auswahl eines Normalenvektors  $\vec{n}$  zu einer Fläche  $A$  nennt man auch eine *Orientierung* der Fläche; man kann damit zwischen einer Ober- und einer Unterseite der Fläche unterscheiden. Wenn die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  zu derselben Seite weist wie der Normalenvektor  $\vec{n}$ , so ist der magnetische Fluss durch die Fläche positiv, andernfalls negativ. Der Fluss ist 0, wenn  $\vec{B}$  parallel zur Fläche verläuft. Wir erhalten so die folgende Definition des magnetischen Flusses.

**Der magnetische Fluss:**

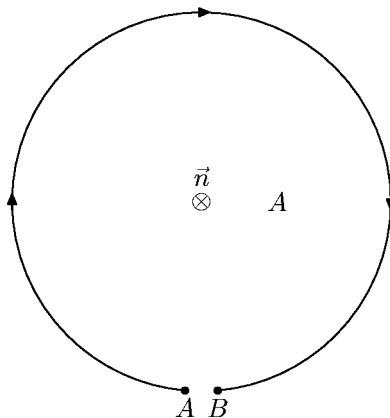
Gegeben ist ein Magnetfeld mit der Flussdichte  $\vec{B}$  sowie ein Flächenstück  $A$ , das durch einen Normalenvektor  $\vec{n}$  orientiert ist. Dann definiert man den magnetischen Fluss  $\Phi$  durch dieses *orientierte* Flächenstück als

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha \quad \text{mit } \alpha = \angle(\vec{B}, \vec{n}).$$

Diese Definition setzt voraus, dass das Magnetfeld über die Fläche hinweg homogen ist. Ändert sich  $\vec{B}$ , so muss man die Fläche in kleine Teilflächen zerlegen und die magnetischen Flüsse addieren. Die allgemeine Definition erfordert daher die Integralrechnung (in höheren Dimension).

Die Formel  $\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha$  zeigt, dass  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$  ein Skalarprodukt ist, und zwar das Skalarprodukt des Flussdichtevektors  $\vec{B}$  mit einem Vektor  $\vec{A}$ , dessen Betrag der Flächeninhalt  $A$  ist und der die Richtung des Normalenvektors  $\vec{n}$  hat.  $\vec{A}$  ist also selbst ein Normalenvektor, durch den die Orientierung des Flächenstücks festgelegt ist. Man nennt diesen Vektor  $\vec{A}$  den *Flächenvektor* des orientierten Flächenstücks.

*β) Vorzeichen der Spannung.* Als zweiten Schritt zum allgemeinen Induktionsgesetz benötigen wir die Festlegung einer Messrichtung für die Induktionsspannung. Bisher haben wir die Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  als die Spannung zwischen den zwei Endpunkten (nennen wir sie  $A$  und  $B$ ) einer Spule definiert; damit war keine Richtung und folglich auch kein Vorzeichen für die Spannung festgelegt. Welche Spannung ist gemeint, die Spannung von  $A$  in Richtung zu  $B$  oder die von  $B$  zu  $A$ ?



In der Skizze ist die Spulenfläche bereits durch einen Normalenvektor  $\vec{n}$  orientiert. Der Normalenvektor weist vom Betrachter weg in die Zeichenebene hinein. Diese Orientierung der Fläche legt auch eine Orientierung für die Randkurve fest, indem man vereinbart: Weist der Daumen der rechten Hand in Richtung des Normalenvektors  $\vec{n}$ , so geben die gekrümmten Finger die Orientierung der Randkurve an.

Mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel legt eine Orientierung eines Flächenstücks zugleich eine Orientierung der Randkurve fest.

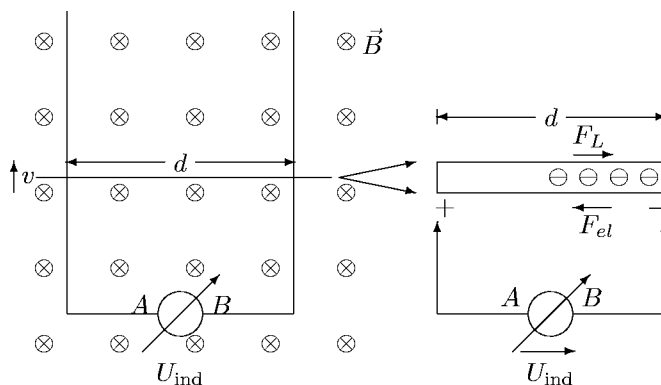
Man misst nun die induzierte Spannung in Richtung dieser Randorientierung:

Die Messrichtung der induzierten Spannung ist die Richtung der Randorientierung, also:

$$U_{\text{ind}} = \frac{W}{q},$$

wobei  $W$  die notwendige Energie ist, um eine Ladung  $q$  von  $A$  nach  $B$  zu bringen. Dies bedeutet:  $U_{\text{ind}}$  ist positiv, wenn bei  $B$  ein positiver Ladungsüberschuss entstanden ist.

Wir wollen nun das Vorzeichen der induzierten Spannung an Hand unserer vereinfachten Leiterschleife (s. S. 29) bestimmen.



Wir orientieren das Flächenstück so, dass der Normalenvektor  $\vec{n}$  die gleiche Richtung wie  $\vec{B}$  hat, also in die Zeichenebene hinein weist. Dann ist der magnetische Fluss positiv, bei Verschiebung des Leiters in Richtung  $\vec{v}$  wächst also der magnetische Fluss, so dass  $\dot{\Phi}$  positiv ist.

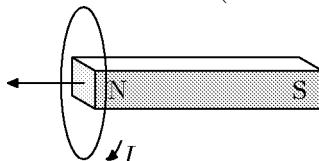
Bei der gewählten Orientierung des Flächenstücks ist die Randkurve von  $A$  nach  $B$  orientiert und die induzierte Spannung also negativ, da bei  $B$  ein negativer Ladungsüberschuss entstanden ist. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen muss das Induktionsgesetz also lauten:

**Allgemeines Induktionsgesetz:**

Ändert sich der magnetische Fluss durch die *orientierte* Querschnittsfläche einer Spule mit  $n$  Windungen, so gilt für die längs des entsprechend *orientierten* Randes der Spule gemessene Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi}.$$

**d. Die Lenzsche Regel.** Wir wollen die physikalische Bedeutung des Minuszeichens im allgemeinen Induktionsgesetz verdeutlichen. Wir betrachten dazu einmal die Annäherung des Nordpols eines Stabmagneten an eine Leiterschleife (wie skizziert). Wir wählen als Orientierung



der Leiterschleife die eingezeichnete Richtung der Bewegung. Dann ist der magnetische Fluss durch die Schleife positiv und wächst, wenn sich der Nordpol der Leiterschleife nähert. Nach dem allgemeinen Induktionsgesetz ist dann die induzierte Spannung negativ. Dies bedeutet,

dass in der Leiterschleife eine Verschiebung *negativer* Ladung in Richtung der Orientierung der Leiterschleife, d. h. gegen den Uhrzeigersinn erfolgt. Der *Induktionsstrom* in der Leiterschleife fließt daher wie angedeutet im Uhrzeigersinn.

Durch diesen Induktionsstrom wird die Leiterschleife zu einem Magneten, dessen Polung dem Stabmagneten entgegengesetzt ist: rechts Nordpol, links Südpol. Dadurch wird der sich nähernde Nordpol des Stabmagneten *abgestoßen*. Die *Wirkung* der Induktion (der Induktionsstrom) ist gegen die *Ursache* der Induktion (die Bewegung des Stabmagneten) gerichtet. Damit haben wir eine physikalische Interpretation des Minuszeichens im allgemeinen Induktionsgesetz gefunden, die

**Lenzsche Regel:** Die *Wirkung* der Induktion ist stets ihrer *Ursache* entgegengerichtet.

Diese Lenzsche Regel ersetzt in vielen Fällen die aufwändigen Überlegungen zur Orientierung der induzierten Spannung (siehe c.). Wir wollen dies einmal an der Situation demonstrieren, in der der obige Stabmagnet die Leiterschleife wieder verlässt. Die Orientierung des Induktionsstroms muss nun so sein, dass der dadurch entstehende Elektromagnet den sich entfernenden Südpol des Stabmagneten zurückzieht, also links einen Nord- und rechts ein Südpol hat. Die Polung ist genau entgegengesetzt zum ersten Fall: Der Induktionsstrom fließt gegen den Uhrzeigersinn und die Induktionsspannung ist positiv (in Richtung der gewählten Orientierung).

Dasselbe Ergebnis ergibt sich aus dem Minuszeichen des allgemeinen Induktionsgesetzes: Wenn der Südpol die Leiterschleife passiert hat, ist der magnetische Fluss positiv und nimmt ab. Also ist  $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}$  positiv. Diese letzte Argumentationskette enthält etliche mögliche Fehlerstellen (Vorzeichen des Flusses, Vorzeichen der Ableitung), während die obige direkte Anwendung der Lenzschen Regel weniger problematisch ist.

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für die Lenzsche Regel sind zwei Spulen auf einem gemeinsamen Eisenkern (siehe S. 30). Schaltet man in der Primärspule den Strom ein, so entsteht in der Sekundärspule durch Ladungsverschiebung eine Induktionsspannung. Der dabei fließende Induktionsstrom erzeugt nun selber ein Magnetfeld. Dieses ist seiner Ursache (dem Anwachsen des Magnetfeldes der Primärspule) entgegengesetzt und schwächt dieses. Damit kann man nun mit Hilfe der Lenzschen Regel sehr schnell die Polung der in der Sekundärspule induzierten Spannung ermitteln.

An diesem Beispiel kann man nun noch besonders deutlich den wahren Grund für die Gültigkeit der Lenzschen Regel erkennen: Sie ist ein Folge des Prinzips der Energieerhaltung bzw. der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile. Ohne das Minuszeichen des allgemeinen Induktionsgesetzes würde das induzierte Magnetfeld der Sekundärspule das anwachsende Magnetfeld der Primärspule weiter verstärken; man hätte einen sich selbst bis ins Unendliche verstärkende Prozess – ein Widerspruch zur Energieerhaltung!

**d. Selbstinduktion.** Ein anderes besonders wichtiges Beispiel für die Lenzsche Regel ist die sog. *Selbstinduktion*. Nach dem Induktionsgesetz wird in einer Spule immer dann eine Spannung induziert, wenn sich der magnetische Fluss durch diese Spule ändert. Dies trifft bei den beiden Spulen, die sich auf einem gemeinsamen Eisenkern befinden (siehe S. 30), nicht nur für die (rechte) Sekundär-, sondern auch für die (linke) Primärspule zu, und dies auch dann, wenn die Sekundärspule gar nicht vorhanden ist. Ändert sich in einer stromdurchflossenen Spule die Stromstärke, so ändert sich in ihr der magnetische Fluss, so dass in der Spule selbst eine Spannung induziert wird. Dieses Phänomen nennt man *Selbstinduktion* und wir haben im Unterricht verschiedene Beispiele dafür gesehen (verzögerter Stromaufbau nach dem Einschalten, verlangsamter Stromabfall nach dem Ausschalten, Aufglühen einer Glimmlampe beim Abschalten des Stromes, Öffnungsfunke an Schaltern). Durch Kombination von magnetischer Feldgleichung und

allgemeinem Induktionsgesetz erhalten wir folgende Gesetzmäßigkeit:

**Selbstinduktion:**

Wird eine Spule von einem zeitlich veränderlichen Strom  $I$  durchflossen, so wird an den Enden eine Spannung  $U_{\text{ind}}$  induziert. Diese ist proportional zur Änderungsrate  $\dot{I}$  des Stromes:

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \dot{I}.$$

Begründung: Wir gehen aus vom Induktionsgesetz  $U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi} = -nA\dot{B}$  mit der konstanten Windungszahl  $n$  und Querschnittsfläche  $A$  der Spule. Das Magnetfeld wird vom Strom  $I$  erzeugt, also gilt nach der magnetischen Feldgleichung (für eine schlanke Spule)

$$B = \mu_0\mu_r \frac{n}{l} \cdot I$$

und damit

$$U_{\text{ind}} = -nA\dot{B} = -\mu_0\mu_r \frac{n^2 A}{l} \cdot \dot{I}.$$

Damit ist die Proportionalität nachgewiesen. Die Proportionalitätskonstante  $L$  nennt man die *Induktivität* der Spule. Ihre Einheit ist das *Henry*:  $1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ .

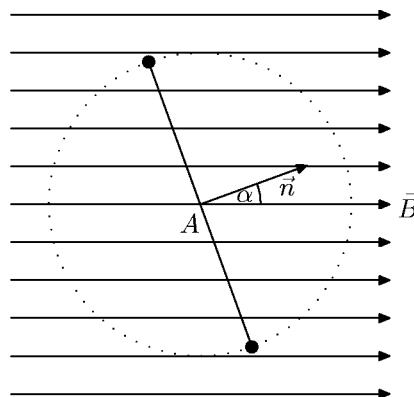
**Induktivität einer Spule:**

$$L = \mu_0\mu_r \frac{n^2 A}{l}, \quad \text{Einheit Henry: } 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Das negative Vorzeichen der induzierten Spannung entspricht wieder der Lenzschen Regel: Die Wirkung der Induktion ist ihrer Ursache entgegen gerichtet. Eine umgekehrte Polung der induzierten Spannung ist auch nicht möglich, da sich sonst der Einschaltstrom durch die Selbstinduktion nicht abschwächen, sondern verstärken würde, im Widerspruch zum Prinzip der Energieerhaltung.

**e. Der Generator, Wechselspannung.** Wir wollen nun das in der Praxis wichtigste Gerät zur Spannungserzeugung untersuchen, den sog. *Generator*. Sein Grundprinzip besteht darin, eine Spule in einem homogenen Magnetfeld zu *drehen*. Die Querschnittsfläche  $A$  der Spule sei orientiert durch einen Normalenvektor  $\vec{n}$ ; dann ist der magnetische Fluss

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \angle(\vec{B}, \vec{n}) = B \cdot A \cdot \cos \alpha.$$



Rotiert die Leiterschleife mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so gilt  $\alpha = \omega t$  (wenn  $\alpha = 0$  bei  $t = 0$ , d. h. wenn die Leiterschleife anfangs senkrecht zum Magnetfeld steht) und der magnetische Fluss ist

$$\Phi = BA \cdot \cos \omega t.$$

Die induzierte Spannung ist daher  $U_{\text{ind}} = -n\dot{\Phi} = nBA\omega \sin \omega t$ .

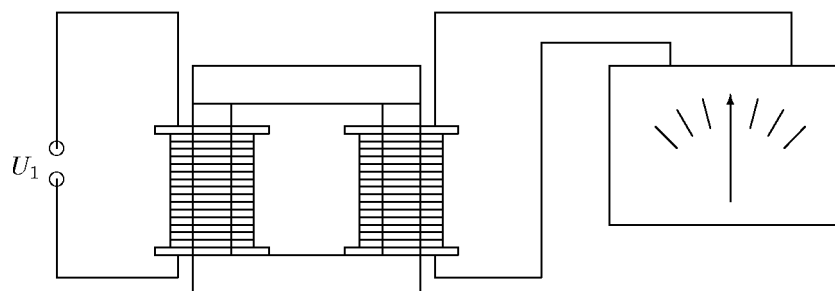
**Generator:**

Rotiert ein Spule der Windungszahl  $n$  und Querschnittsfläche  $A$  in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte  $B$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so wird an den Enden der Spule eine sinusförmige Wechselspannung  $U = \hat{U} \sin \omega t$  induziert. Die Maximalspannung beträgt dabei  $\hat{U} = nBA\omega$ .

Auf diesem Prinzip basiert die Stromerzeugung in allen elektrischen Kraftwerken. Dies ist einer der Gründe, warum in der Praxis Wechsel-, und nicht Gleichstrom verwendet wird.

**f. Transformator.** Wir betrachten noch einmal die beiden Spulen auf einem gemeinsamen Eisenkern (vgl. S. 30). Wir schließen nun aber die Primärspule an eine Wechselspannung  $U_1$

**Transformator**



an. In der Primärspule fließt dann ein Wechselstrom  $I_1$ . Dies bedeutet, dass sich im Eisenkern das Magnetfeld ständig ändert, also in der Sekundärspule beständig eine Spannung  $U_2$  induziert wird. Das so konstruierte Gerät ist ein *Transformator*; damit können Spannungen *transformiert* (=verändert) werden. Transformatoren werden an vielen Stellen eingesetzt, etwa um die Hochspannung von Überlandleitungen (110 kV) auf die im Haushalt übliche Spannung von 220 V, oder um die haushaltsüblichen 220 V auf z. B. 12 V für eine Halogen-Niedervolt-Lampe herunterzusetzen. Dies ist ein weiterer, bei der historischen Auseinandersetzung zwischen der Gleich- und der Wechselstromtechnik entscheidender Vorteil des Wechselstroms.

Wenn man von Energieverlusten im elektrischen Stromkreis (kein Ohmscher Widerstand der Spulen) und im Magnetfeld (keine Wirbelströme im Eisenkern, kein Streufluss, d. h. gesamter magnetischer Fluss ist auf den Eisenkern beschränkt) absieht, spricht man von einem *idealen* Transformator. Für ihn gilt die folgende fundamentale Gesetzmäßigkeit:

**Idealer Transformator:**

Die Maximalwerte von Primär- und Sekundärspannung eines verlustfreien Transformators sind proportional zueinander. Sie verhalten sich wie die Windungszahlen der zugehörigen Spulen:

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Korr!

Begründung: Schließt man die Primärspule an eine Spannung  $U_1$  an, so würde bei idealer Spannungsquelle und fehlendem Ohmschem Widerstand der Strom  $I_1$  theoretisch unbegrenzt sein. Dies geschieht nicht, da ihm die Selbstinduktion entgegenwirkt: Der anwachsende Wechselstrom

erzeugt eine Selbstinduktionsspannung  $U_{\text{ind}} = -n_1 \dot{\Phi}$  ( $\Phi$  der magnetische Fluss durch den gemeinsamen Eisenkern) in der Primärspule. Diese wirkt der angelegten Spannung entgegen und es kommt zu einem stabilen Zustand, wenn sich die angelegte Spannung  $U_1$  und die entgegengerichtete induzierte Spannung kompensieren:  $U_1 = n_1 \dot{\Phi}$ . Der entstehende Wechselstrom in der (widerstandsfreien) Primärspule ist gerade so groß, dass seine Selbstinduktionsspannung mit der angelegten Wechselfeldspannung  $U_1$  übereinstimmt.

Nun wird die Sekundärspannung  $U_2$  durch das gleiche sich ändernde Magnetfeld induziert, also gilt nach dem Induktionsgesetz  $U_2 = -n_2 \dot{\Phi}$ . Der Vergleich beider Ergebnisse zeigt:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{n_2}{n_1}.$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Spannungen einander entgegengerichtet sind.

Bei der Herleitung dieser Beziehung haben wir einen sog. *unbelasteten* Transformator vorausgesetzt: In der Sekundärspule fließt kein Strom. Ein (Wechsel-)Strom in der Sekundärspule verändert den (gemeinsamen) magnetischen Fluss  $\Phi$  im Eisenkern und reduziert  $U_2$  durch Selbstinduktion, aber auch  $U_1$  wird durch die Induktionswirkung von  $I_2$  verändert. Das obige Spannungsverhältnis gilt jedoch allgemein (beim verlustfreien Transformator).

Korr!

## 11. Differentialgleichungen in der Physik

Wir wollen in diesem Abschnitt an einigen Beispielen zumindest ansatzweise ein fundamentales Hilfsmittel besprechen, das in allen Bereichen der Physik von großer Bedeutung ist, insbesondere bei der Bestimmung der zeitlichen Abläufe physikalischer Vorgänge (Bewegungsgesetze ganz allgemein, insbesondere Schwingungen und Wellen, aber auch Ein- und Ausschaltvorgänge im Elektromagnetismus.) Dies ist das Gebiet der sog. Differentialgleichungen, das wir an einigen ausgewählten physikalischen Beispielen in seinen Grundprinzipien vorstellen möchten. Wir werden uns dabei nur auf die im Mathematikunterricht bereitgestellten Hilfsmittel der Differentialrechnung stützen. Eine systematische mathematische Behandlung des Gebietes der Differentialgleichungen ist dabei bewusst nicht angestrebt.

**a. Bewegungsgleichungen und Differentialrechnung.** Eines der Grundprobleme der Mechanik war die Bestimmung der Bewegungsgesetze. Darunter verstanden wir die Abhängigkeit des Ortes  $s$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der Beschleunigung  $a$  von der Zeit  $t$ . Wir haben diese Bewegungsgesetze für einige Bewegungsarten ermittelt, siehe die Zusammenstellung in Abschnitt 6.a. des Mechanik-Skripts. Bei der Herleitung der Zusammenhänge haben wir die Verwendung der Differentialrechnung weitgehend vermieden, da diese am Kolleg erst im F-Kurs thematisiert wird. Wir wollen nun die inhaltlich und historisch enge Verbindung zwischen Differentialrechnung und Bewegungsgesetzen kurz darstellen.

Ausgangspunkt ist die Definition der *Momentangeschwindigkeit* (siehe Mechanik-Skript S. 18). Diese war definiert als der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ , wenn das Messintervall  $\Delta t$  gegen 0 strebt:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dies bedeutet mit den Begriffen der Differentialrechnung: Die Geschwindigkeit  $v$  ist die Ableitung des Ortes  $s$  nach der Zeit  $t$ . Für diese *zeitliche* Ableitung einer physikalischen Größe hat sich in der Physik ein besonderes Zeichen eingebürgert. Statt des in der Mathematik üblichen Ableitungsstriches  $s'$  (lies  $s$ -Strich) benutzt man in der Physik die Bezeichnung  $\dot{s}$  (lies  $s$ -Punkt). Also:

$$v = \dot{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Diese Begriffe werden auch für vektorielle Größen verwendet. Ist etwa  $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein ebener Ortsvektor, so ist die (vektorielle) Geschwindigkeit dessen zeitliche Ableitung

$$\vec{v} = \dot{\vec{s}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$



Dies zeigt zugleich, dass man bei vektoriellen Größen die Ableitung koordinatenweise bestimmen kann.

So wie die Geschwindigkeit  $v$  die zeitliche Ableitung des Ortes  $s$  ist, ist die Beschleunigung  $a$  die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit  $v$ ,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v} = \ddot{s},$$

und damit die zweite zeitliche Ableitung des Ortes. Dies bedeutet:

Aus dem Weg-Zeit-Gesetz eines Bewegungsvorganges kann man durch Ableitung nach der Zeit das Geschwindigkeits- und das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz gewinnen.

Als Beispiel wollen wir die Zentripetalbeschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung rein mathematisch herleiten. Bewegt sich ein Körper gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einem Kreis vom Radius  $r$ , so gilt für seinen Ortsvektor bei Start im Punkt  $(r, 0)$  und Drehung gegen den Uhrzeiger (aufgrund einfacher geometrischer Überlegungen, siehe auch Mechanik-Skript, III 12.a)

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Durch Ableitung nach der Zeit  $t$  gewinnt man daraus (unter Verwendung bekannter Ableitungsregeln einschließlich der Kettenregel)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{s},$$

und das besagt, dass die Beschleunigung stets dem Ortsvektor entgegengesetzt, also zum Zentrum hin gerichtet ist. Außerdem ergibt sich die Konstanz des Betrages der Zentripetalbeschleunigung

$$a_z = |\vec{a}| = \omega^2 |\vec{s}| = \omega^2 \cdot r.$$

Auch die Orthogonalität von Orts- und Geschwindigkeitsvektor ergibt sich aus obigen Formeln:

$$\vec{v} \perp \vec{s}, \text{ denn } \vec{v} \cdot \vec{s} = 0.$$

**b. Dynamische Charakterisierung von Bewegungen.** Man kann aber die Differentialrechnung nicht nur benutzen, um aus dem Weg-Zeit-Gesetz alle möglichen anderen kinematischen Fakten abzuleiten, vielmehr kann man auch umgekehrt aus der Dynamik, d. h. aus der Kenntnis der wirkenden Kräfte und damit aus der Kenntnis der Beschleunigung auf die Bewegungsgesetze (Geschwindigkeits-Zeit- und Weg-Zeit-Gesetz) schließen. So sind wir auch bei der Herleitung des Gesetzes des freien Falls vorgegangen, damals allerdings unter Vermeidung mathematischer Hilfsmittel der Differential- und Integralrechnung. Wir wollen jetzt die damalige Herleitung wiederholen, dabei aber die Vorteile der Differentialrechnung nutzen.

Ein Körper erfahre eine konstante Kraft  $F$ , also eine konstante Beschleunigung  $a$ . Dann gilt für Geschwindigkeit  $v$  und Ort  $s$ :

$$\begin{aligned} \dot{v} = a \text{ konstant} &\implies v = at + v_0, \\ \dot{s} = v = at + v_0 &\implies s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir aus der Differentialrechnung benutzt, dass (über einem Intervall) eine Funktion durch ihre Ableitung bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

Als weiteres wichtiges Anwendungsbeispiel wollen wir gleichförmige Kreisbewegungen nicht durch geometrische, sondern durch *dynamische* Eigenschaften beschreiben (s. S. 26). Dazu zeigen wir zunächst die folgende Tatsache, die wir schon bei der Bewegung im Magnetfeld (s. S. 25) kurz erwähnt hatten:

Ein Körper bewegt sich mit konstanter *Bahngeschwindigkeit* (d. h. mit *betraglich* konstanter Geschwindigkeit) genau dann, wenn der Geschwindigkeitsvektor stets orthogonal ist zum Beschleunigungsvektor bzw. zum wirkenden Kraftvektor:

$$|\vec{v}| \text{ konstant} \iff \vec{v} \perp \vec{a} \iff \vec{v} \perp \vec{F}.$$

Beweis: Ist  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ , so kann man die Konstanz der Bahngeschwindigkeit so formulieren:

$$|\vec{v}| \text{ konstant} \iff |\vec{v}|^2 \text{ konstant} \iff (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \text{ konstant}.$$

Nun ist eine (differenzierbare) Funktion genau dann konstant, wenn ihre Ableitung 0 ist. Gemäß Kettenregel erhält man damit

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \text{ konstant} \iff 2v_x \dot{v}_x + 2v_y \dot{v}_y + 2v_z \dot{v}_z = 0 \iff v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{a}.$$

Damit können wir nun die noch unbewiesene dynamische Charakterisierung von Kreisbewegungen (siehe S. 26) nachtragen:

**Dynamische Charakterisierung gleichförmiger Kreisbewegungen:**  
Bewegt sich ein Körper in einer Ebene und ist die einwirkende Kraft betraglich konstant und stets im rechten Winkel zur Bahn, so liegt notwendig eine gleichförmige Kreisbewegung vor.

Beweis: Wenn sich der Körper in einer Ebene bewegt, wird er durch zwei Koordinaten  $x, y$  (in einem geeigneten ebenen Koordinatensystem) beschrieben. Wir wählen als Ursprung dieses Koordinatensystems die Position des Körpers zum Zeitpunkt  $t = 0$ , also  $x_0 = y_0 = 0$ . Die Richtung der  $x$ -Achse weise in Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die  $y$ -Achse liegt damit auch fest, wenn die Koordinatenachsen die übliche (rechtshändige) Orientierung haben. Wie wir oben gezeigt haben, muss die Bahngeschwindigkeit  $v$  konstant sein. Für den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  gilt daher

$$\vec{v} = v \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

wobei  $\varphi$  der (von der Zeit  $t$  abhängige) Winkel zwischen  $\vec{v}$  und der positiven  $x$ -Achse des Koordinatensystems ist. Nach Wahl des Koordinatensystems ist  $\varphi_0 = 0$ .

Der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  ist die zeitliche Ableitung von  $\vec{v}$ , daher gilt gemäß Kettenregel:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = v \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix} = v \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und diese ist nach Voraussetzung betraglich konstant:

$$a = |\vec{a}| = v |\dot{\varphi}|.$$

Damit ist  $\dot{\varphi}$ , die Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Richtungswinkel  $\varphi$  des Geschwindigkeitsvektors dreht, (betraglich) konstant:

$$\omega := \dot{\varphi} = \pm \frac{a}{v}.$$

Das Vorzeichen von  $\omega$  wird bestimmt durch die Orientierung der Beschleunigung  $\vec{a}_0$  im Startzeitpunkt; genauer: Wegen  $\varphi_0 = 0$  gilt (siehe oben)

$$\vec{a}_0 = v\dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist positiv, wenn  $\vec{v}_0, \vec{a}_0$  positiv (rechtshändig) orientiert sind, andernfalls ist  $\omega < 0$ .

Mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  folgt dann

$$\dot{\varphi} = \omega \implies \varphi = \omega t + \varphi_0 = \omega t \implies \vec{v} = v \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Nun ist der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  die zeitliche Ableitung des Ortsvektors  $\vec{s}$  und es folgt

$$\dot{\vec{s}} = \vec{v} = v \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \implies \vec{s} = \frac{v}{\omega} \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \end{pmatrix} + \vec{m}$$

mit einem konstanten Vektor  $\vec{m}$ . Die so gefundene Darstellung für  $\vec{s}$  zeigt, dass sich der Körper auf einem Kreis um  $\vec{m}$  vom Radius  $r := \frac{v}{|\omega|} = \frac{v}{a/v} = \frac{v^2}{a}$  bewegt und dabei die konstante Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \pm \frac{a}{v}$  hat. Indem man  $t = 0$  setzt erhält man den Kreismittelpunkt  $M$ :

$$\vec{0} = \vec{s}_0 = \vec{m} \pm r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm r \end{pmatrix} \iff M = (0, \pm r).$$

**c. Ausschaltvorgang einer Spule.** Wir kommen nun zu dem in der Einleitung angekündigten Thema, den Differentialgleichungen in der Physik. Wir beginnen mit der Untersuchung eines Vorganges, der zunächst unkompliziert erscheint: das Ein- bzw. Ausschalten eines Stromkreises. In einem Stromkreis, der nur einen gewöhnlichen Verbraucher (Widerstand) enthält, mag dies auch tatsächlich der Fall sein. Wenn jedoch weitere Schaltelemente hinzukommen (Spulen, Kondensatoren), dann ist dieser Vorgang beileibe nicht mehr so simpel wie er auf den ersten Blick vielleicht scheint. Wir wollen zunächst die beiden genannten Bausteine (Spule, Kondensator) getrennt betrachten.

Ziel unserer Überlegungen ist es, den zeitlichen Verlauf der Stromstärke zu bestimmen, d. h. die Funktion  $I(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit. Nach dem Abschalten der Primärspannungsquelle schwächt sich der Strom, wie wir im Experiment gesehen haben, nur langsam ab. Wodurch wird nun dieser Strom bei fehlender Spannungsquelle gespeist? Dies ist die Induktionsspannung  $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$ ! Sie ist die alleinig wirksame effektive Spannung  $U(t)$  an den Enden der Spule:

$$U(t) = U_{\text{ind}} = -L\dot{I}(t). \quad (1)$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt aber

$$U(t) = R \cdot I(t). \quad (2)$$

Die Kombination von (1) und (2) ergibt die folgende fundamentale, den Ausschaltvorgang beherrschende Gleichung für die Funktion  $I(t)$ :

$$I(t) = -\frac{L}{R}\dot{I}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{I}(t) = -\frac{R}{L}I(t). \quad (3)$$

Man nennt eine solche Gleichung für eine gesuchte Funktion eine *Differentialgleichung*, weil sie neben der Funktion auch deren Ableitung enthält. Beachten Sie, dass die Lösung einer Differentialgleichung nicht eine einzelne Zahl, sondern eine ganze *Funktion* ist. Im obigen Beispiel ist dies die Funktion  $I$ , die zu jedem Zeitpunkt  $t$  den Wert der Stromstärke  $I(t)$  angibt. Der gesamte zeitliche Verlauf der Stromstärke ist also gesucht.

Die zweite Form der Gleichung (3) besagt in Worten:

Zu jedem Zeitpunkt ist die zeitliche Änderungsrate (Ableitung)  $\dot{I}(t)$  der gesuchten Funktion dem jeweiligen Funktionswert  $I(t)$  proportional: Je mehr vorhanden ist, desto stärker ist die Abnahme; je geringer der Wert wird, desto langsamer vollzieht sich die Abnahme.

Dieses Phänomen findet man nicht nur beim Ausschaltvorgang in einem Stromkreis mit einer Spule. Es handelt sich vielmehr um ein höchst universelles Phänomen, das sich in den unterschiedlichsten Zusammenhängen findet: Entladung eines Kondensators (s. u.), Ein- statt Ausschaltvorgänge, radioaktiver Zerfall, Bakterienwachstum, etc. Alle diese Fragen führen auf Differentialgleichungen des Typs (3) und haben daher analoge Lösungen. Wir werden sehen, dass diese Lösungen im wesentlichen durch die  $e$ -Funktion (Exponentialfunktion)  $\exp(x) = e^x$  gegeben sind. Dies ist der wahre Grund für die fundamentale und universelle Bedeutung dieser Funktion.

**d. Der Einschaltvorgang.** Bevor wir die Differentialgleichung (3) behandeln, wollen wir uns überlegen, dass der Ablauf des Einschaltstroms den gleichen Gesetzmäßigkeiten genügt. (Zugleich ist dies eine Übung zu den obigen Überlegungen.) Durch das Einschalten des Stromkreises wird an die Spule die Spannung  $U_1$  der Spannungsquelle angelegt. Diese erzeugt (ohne Berücksichtigung der Selbstinduktion) nach dem Ohm'schen Gesetz einen Strom der Stärke  $I_1 = U_1/R$  ( $R$  der Widerstand der Spule). Nun ändert sich aber während des Anstiegs der Stromstärke das Magnetfeld, so dass dadurch wieder eine Spannung induziert wird. Diese kommt zu der angelegten Spannung  $U_1$  hinzu, wirkt ihr aber entgegen (Lenz'sche Regel, Vorzeichen). Die an der Spule wirksam werdende effektive Spannung verringert sich so auf

$$U(t) = U_1 + U_{\text{ind}} = U_1 - L\dot{I}(t). \quad (1')$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz (2) erhalten wir aus (1') nun die Differentialgleichung für den Stromverlauf beim Einschaltvorgang

$$I(t) = I_1 - \frac{L}{R}\dot{I}(t). \quad (3')$$

Die Analogie zwischen (3) und (3') wird zu einer völligen Übereinstimmung, wenn man beim Einschalten nicht die momentane Stromstärke  $I(t)$  untersucht, sondern die Abweichung von der Endstromstärke  $I_1$ :

$$\text{Abweichung vom stationären Endzustand: } J(t) = I(t) - I_1. \quad (4)$$

Da  $I_1$  ein zeitlich unveränderlicher Wert ist, erhalten wir nach bekannten Regeln der Differentialrechnung

$$\dot{J}(t) = \dot{I}(t) - 0 = \dot{I}(t), \quad (5)$$

und die Differentialgleichung (3') nimmt die Form an:

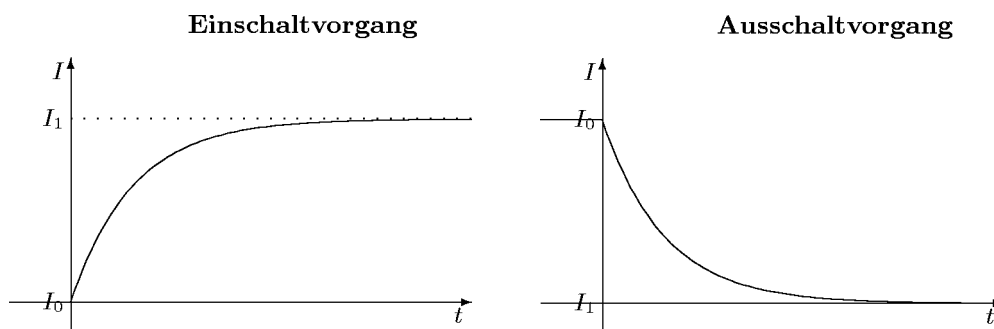
$$J(t) = -\frac{L}{R}\dot{J}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{J}(t) = -\frac{R}{L}J(t) \quad (3'')$$

Damit erfüllt die modifizierte Funktion  $J(t)$  des Einschaltvorganges *genau dieselbe Differentialgleichung* wie oben die Funktion  $I(t)$  beim Ausschaltvorgang.

Nun ist beim Ausschalten die Endstromstärke  $I_1 = 0$ , so dass dort also  $I(t)$  und  $J(t)$  zusammenfallen. Man kann daher Ein- und Ausschaltvorgänge wie folgt zusammenfassen:

Zu jedem Zeitpunkt ist die Änderungsrate (zeitliche Ableitung) der gesuchten Funktion dem jeweiligen Abstand  $J(t) = I(t) - I_1$  vom Endzustand proportional: Je mehr vorhanden ist bzw. noch fehlt, desto stärker ist die Ab- bzw. Zunahme; je näher man dem Endzustand kommt, desto langsamer vollzieht sich die Ab- bzw. Zunahme.

Aufgrund dieser Tatsache ist der folgende Verlauf der Stromstärke vorstellbar. Wir werden weiter unten sehen, dass diese Skizzen qualitativ richtig sind.



**e. Die Differentialgleichung  $f' = kf$ .** Wir wollen nun die Differentialgleichung (3) lösen. Sieht man von den physikalischen Größen und Bezeichnungen ab, so reduziert sich der mathematische Kern auf die folgende Frage:

Gegeben eine reelle Zahl  $k$ .

Gesucht sind die differenzierbaren Funktionen  $f$  mit der Eigenschaft

$$f'(x) = k \cdot f(x) \quad \text{für alle } x. \quad (6)$$

Aus dem Mathematik-Unterricht kennen Sie die *Exponentialfunktionen*  $\exp_a(x) = a^x$ . Unter diesen gibt es eine ganz besondere, die Exponentialfunktion mit der Basis  $e$  (der Euler'schen Zahl). Diese ist dadurch ausgezeichnet, dass die Funktion  $\exp(x) = e^x$  ihre eigene Ableitung ist:

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Aufgrund dieser fundamentalen Eigenschaft der  $e$ -Funktion kann man leicht überprüfen, dass für ein festes  $k$  alle Funktionen

$$f_a(x) = a \cdot e^{kx} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

Lösungen der Differentialgleichung (6) sind, denn gemäß Faktor- und Kettenregel gilt:

$$f'_a(x) = a \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot f_a(x). \quad (8)$$

Wir wollen nun die alles entscheidende Aussage beweisen, dass dies *sämtliche* Lösungen der Differentialgleichung sind:

Jede Funktion  $f$  mit der Eigenschaft  $f'(x) = k \cdot f(x)$  für alle  $x$  ist notwendig von der Form  $f(x) = a \cdot e^{kx}$  mit einem passenden  $a$ .

Zum Beweis gehen wir also von einer *beliebigen* differenzierbaren Funktion  $f(x)$  aus mit  $f'(x) = k \cdot f(x)$ . Wir vergleichen nun diese Funktion mit der Funktion  $e^{kx}$ , indem wir den Quotienten

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}} \quad (9)$$

untersuchen. Diese Funktion ist überall definiert, da der Nenner niemals 0 wird. Wir zeigen durch Differenzieren, dass diese Funktion *konstant* ist. Gemäß der Quotientenregel erhalten wir:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^{kx} - f(x) \cdot ke^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} \stackrel{(6)}{=} 0. \quad (10)$$

Eine Funktion, deren Ableitung überall 0 ist, ist über einem Intervall konstant, d. h. sie hat immer denselben Wert; nennen wir ihn  $a$ . Es gilt also

$$\frac{f(x)}{e^{kx}} = g(x) = a \text{ für alle } x. \quad (11)$$

Daraus erhalten wir aber sofort die behauptete Formel für  $f(x)$ :

$$f(x) = a \cdot e^{kx} \text{ für alle } x. \quad (12)$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun auf unser physikalisches Problem anwenden. Gemäß unserer einheitlichen Formulierung erhalten wir aus (3'') bzw. (3)  $J(t) = k \cdot J(t)$  mit  $k = -R/L$ . Also ergibt sich für die Funktion  $J(t)$  folgende explizite Form:

$$J(t) = a \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \text{ für eine geeignete Konstante } a. \quad (13)$$

Man muss nun nur noch die Konstante  $a$  bestimmen. Welche physikalische Bedeutung hat sie? Setzt man in (13) den Startzeitpunkt  $t = 0$  ein, so ergibt sich

$$J(0) = a \cdot e^0 = a, \quad (14)$$

d. h.  $a$  ist der Startwert  $J(0)$ . Damit gilt für das Ein- und Ausschalten einer Spule gleichermaßen:

Abweichung vom stationären Endzustand:  $J(t) = J(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ .

(14')

Für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke  $I(t)$  ergibt sich daraus in den beiden Fällen:

1. Beim *Ausschalten* ist die Endstromstärke  $I_1 = 0$  und daher  $J(t) = I(t)$  sowie  $J(0) = I_0$ . Also ergibt sich aus (14')

Ausschaltstrom einer Spule:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ .

2. Beim *Einschalten* hingegen ist  $I_0 = 0$  und  $J(t) = I(t) - I_1$ , also  $J(0) = -I_1$ . Damit ergibt (14')

$$I(t) - I_1 = J(t) = -I_1 e^{-\frac{R}{L}t} \iff I(t) = I_1 - I_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

und man erhält

Einschaltstrom einer Spule:  $I(t) = I_1 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ .

Der Einschaltvorgang stellt sich so als 'das Negative', die 'Umkehrung' des Ausschaltvorganges dar, nur die Rollen von Anfang und Ende, und damit die Werte  $I_0$  bzw.  $I_1$  sind vertauscht.

Unsere früheren qualitativen Skizzen für Ein- und Ausschaltstrom entsprechen den jetzt gefundenen exakten Ergebnissen.

**f. Entladung eines Kondensators.** Wir betrachten einen geladenen Plattenkondensator und wollen den Entladungsvorgang untersuchen: Was geschieht, wenn man beide Platten über einen Widerstand kurzschließt? Selbstverständlich sinkt die Spannung  $U(t)$  zwischen den Platten von einem Anfangswert  $U_0$  ab auf den Endwert  $U_1 = 0$ . Aber wie ist der zeitliche Verlauf der Spannung  $U(t)$  zwischen den Kondensatorplatten?

Wir erinnern uns: Die Ladung  $Q(t)$  eines Kondensators ist zur Spannung  $U(t)$  zwischen den Platten proportional; der Proportionalitätsfaktor ist die *Kapazität*  $C$ :

$$Q(t) = C \cdot U(t). \quad (15)$$

Zugleich ist in einem Stromkreis mit dem Widerstand  $R$  die Stromstärke  $I(t)$  proportional zur Spannung  $U(t)$ , also

$$U(t) = R \cdot I(t). \quad (16)$$

Schließlich muss man noch den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Ladung beachten: Die Stromstärke ist nach Definition das Verhältnis von geflossener Ladung zur dafür benötigten Zeit, oder mit anderen Worten, die Änderungsgeschwindigkeit der Ladung:

$$I(t) = -\dot{Q}(t). \quad (17)$$

Das Minuszeichen rührt daher, dass  $Q(t)$  die Restladung auf dem Kondensator bezeichnet; wird diese geringer, so ist  $\dot{Q}(t)$  negativ,  $-\dot{Q}(t)$  also positiv.

Die Kombination von (15) – (17) führt auf die uns fast schon vertraute Differentialgleichung

$$U(t) = -RC \cdot \dot{U}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{U}(t) = -\frac{1}{RC}U(t). \quad (18)$$

Gemäß (13) und in Analogie zu (14') erhalten wir als Lösung unseres Problems:

Entladung:  $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

mit der Ausgangsspannung  $U_0$ . Für den 'umgekehrten' Aufladungsvorgang erhalten wir analog wie oben:

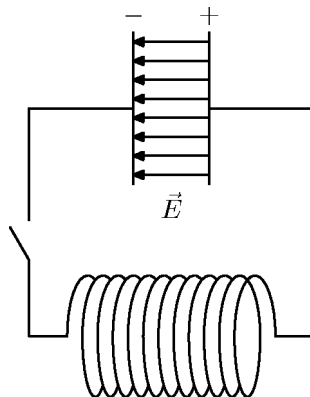
Aufladung:  $U(t) = U_1 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

mit der Endspannung  $U_1$ .

Die Kurven für diese Spannungsverläufe haben qualitativ dieselbe Gestalt wie die oben skizzierten Kurven.

Überlegen Sie, welche Auswirkung die physikalischen Größen  $R$ ,  $C$ ,  $L$  auf die Gestalt der gewonnenen Kurven haben, und formulieren Sie die physikalischen Konsequenzen.

**g. Der Schwingkreis.** Wir kombinieren nun die beiden oben studierten Phänomene, indem wir einen Kondensator über eine Spule entladen.

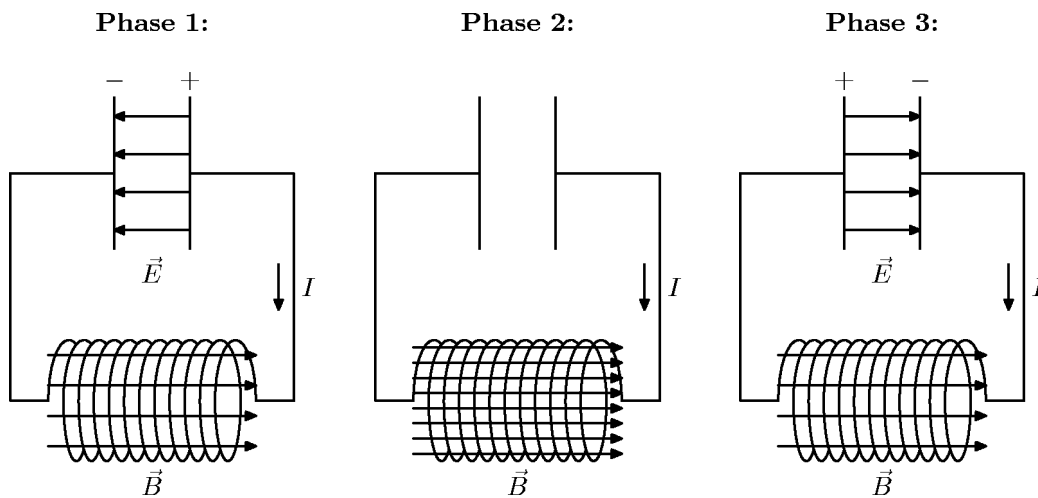


Wir schließen an einen geladenen Kondensator eine Spule an. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  schließen wir den Schalter. Was geschieht?

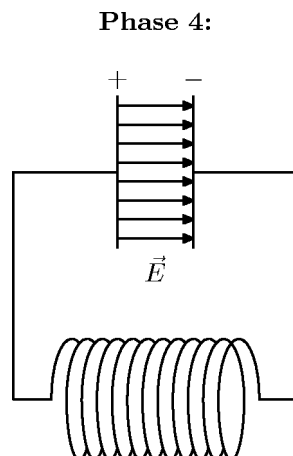
**Phase 1:** Es beginnt ein Stromfluss  $I$  in der eingezeichneten Richtung. Das elektrische Feld im Kondensator schwächt sich ab, während sich in der Spule ein Magnetfeld aufbaut. Die Selbstinduktionswirkung bremst den Stromanstieg.

**Phase 2:** Der Kondensator hat sich vollständig entladen, das Magnetfeld hat seine größte Stärke entwickelt.

**Phase 3:** Durch die Selbstinduktion hört der Stromfluss nicht unmittelbar auf, der Stromfluss nimmt langsam ab. Der Kondensator wird durch den weiter fließenden Strom wieder aufgeladen, jedoch in umgekehrter Polung.

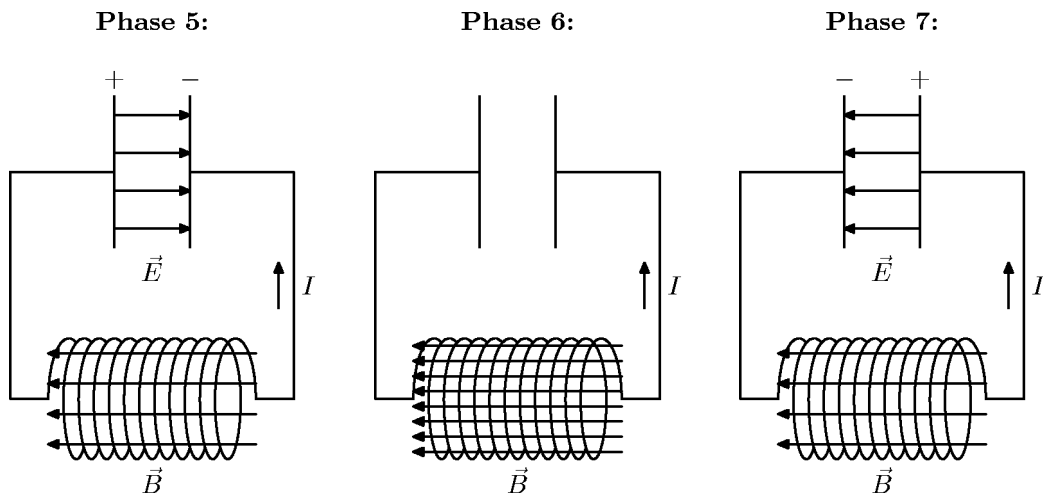


**Phase 4:** Schließlich ist das Magnetfeld verschwunden, es fließt kein Strom, aber der Kondensator ist wieder vollständig geladen. Wir haben damit den Ausgangszustand erreicht, jedoch mit umgekehrter Polung des Kondensators.



Von hier an wiederholen sich die obigen Vorgänge, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen bzw. Richtungen:





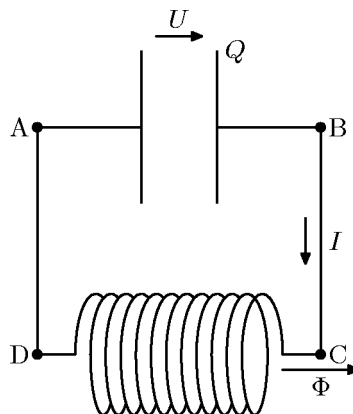
Wir erreichen schließlich in Phase 8 wieder genau den Ausgangszustand und der Ablauf wiederholt sich. Wir erkennen:

Entlädt sich ein Kondensator über eine Spule, so *schwingt* der Wert der Ladungsmenge  $Q$  auf dem Kondensator zwischen zwei Extremwerten hin und her. Man nennt daher die obige Schaltung *Schwingkreis*.

Wir wollen nun den zeitlichen Ablauf dieser Schwingung genauer analysieren und nehmen zur Vereinfachung an, dass die Spule widerstandsfrei ist ( $R = 0$ ). Unter dieser Annahme wollen wir zeigen, dass die Schwingung *harmonisch* ist, d. h. sich durch eine geeignete Sinusfunktion beschreiben lässt.

Zur genaueren Analyse der obigen Situation fixieren wir die Messrichtungen der einzelnen Größen. (In der nachfolgenden Skizze sind die positiven Messrichtungen eingetragen.)

1.  $Q$  ist die Ladungsmenge auf der rechten Kondensatorplatte,
2.  $I$  ist die Stromstärke in der eingezeichneten Messrichtung,
3.  $U$  ist die Spannung des Kondensators von  $A$  zu  $B$ ,
4.  $\Phi$  ist der magnetische Fluss durch die Spule in der Orientierung der Spulenfläche.



Bei dieser Festlegung haben wir in den einzelnen Phasen folgende Vorzeichen der verschiedenen

Größen:

Phase	Ladung $Q$	Spannung $U$	Strom $I$	Fluss $\Phi$
0	$Q > 0$	$U > 0$	$I = 0$	$\Phi = 0$
1	$Q > 0$	$U > 0$	$I > 0$	$\Phi > 0$
2	$Q = 0$	$U = 0$	$I > 0$	$\Phi > 0$
3	$Q < 0$	$U < 0$	$I > 0$	$\Phi > 0$
4	$Q < 0$	$U < 0$	$I = 0$	$\Phi = 0$
5	$Q < 0$	$U < 0$	$I < 0$	$\Phi < 0$
6	$Q = 0$	$U = 0$	$I < 0$	$\Phi < 0$
7	$Q > 0$	$U > 0$	$I < 0$	$\Phi < 0$
8	$Q > 0$	$U > 0$	$I = 0$	$\Phi = 0$

Ladung  $Q$  und Spannung  $U$  haben immer dasselbe Vorzeichen, denn sie sind proportional mit positiver Proportionalitätskonstante; ist  $C$  die Kapazität des Kondensators, so gilt:

$$U = \frac{Q}{C}.$$

Auch die Stromstärke  $I$  wird durch die Ladungsverteilung auf dem Kondensator bestimmt, genauer durch die zeitliche Änderungsrate der Ladung  $Q$  auf der rechten Platte:  $I = -\dot{Q}$ . Das Minuszeichen ergibt sich daraus, dass  $Q$  die *Restladung* auf der rechten Kondensatorplatte ist. Diese nimmt ab ( $\dot{Q} < 0$ ), während der Strom  $I$  in der eingezeichneten Richtung positiv ist.

Durch den anwachsenden Spulenstrom wird eine (Selbstinduktions-)Spannung  $U_{\text{ind}}$  an den Enden der Spule induziert. Diese ist nach der Lenzschen Regel der Ursache (dem anwachsenden Strom und damit der Spannung  $U$ ) entgegengesetzt, also ist  $U_{\text{ind}}$  die Spannung von  $C$  zu  $D$ . Mit der Maschenregel erhalten wir aus dem Selbstinduktionsgesetz

$$0 = U + U_{\text{ind}} = \frac{Q}{C} - L\dot{I} \iff \frac{Q}{C} = L\dot{I},$$

wobei  $L$  die Induktivität der Spule ist.

Nun folgt aus  $I = -\dot{Q}$  durch zeitliche Ableitung  $\dot{I} = -\ddot{Q}$  und wir erhalten damit die grundlegende Differentialgleichung für die Ladungsmenge  $Q$  auf der rechten Platte:

$$\frac{Q}{C} = L \cdot \dot{I} = -L\ddot{Q} \iff \ddot{Q} = -\frac{1}{CL}Q.$$

Die Ladungsmenge  $Q$  auf dem Kondensator eines Schwingkreises (ohne Ohmschen Widerstand) genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{Q} = -kQ \quad \text{mit } k = \frac{1}{CL} > 0.$$

Dabei ist  $C$  die Kapazität des Kondensators und  $L$  die Induktivität der Spule.

Diese Differentialgleichung, bei der die zweite zeitliche Ableitung der gesuchten Funktion negativ proportional zur Funktion selbst ist, haben wir bereits bei harmonischen Schwingungen kennengelernt ( $a = \ddot{s} = -ks$ ), weshalb sie *Schwingungsdifferentialgleichung* genannt wird.

**h. Die Schwingungsdifferentialgleichung.** Wir wollen nun unabhängig vom physikalischen Kontext rein mathematisch zeigen, dass diese Differentialgleichung (bei gegebenen Startwerten) nur eine Lösung hat, eine Sinusfunktion. Diese Herleitung liefert dann auch eine solide Begründung für die früher gefundenen Bewegungsgesetze harmonischer Schwingungen.

Wie schon in der Einleitung zu diesem Abschnitt 11. betont, wollen wir hier die Differentialgleichung allein mit Mitteln der Schulmathematik lösen.

Gegeben eine positive reelle Zahl  $k$ .

Gesucht sind alle differenzierbaren Funktionen  $f$  mit der Eigenschaft

$$f''(t) = -k \cdot f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Setzt man  $\omega = \sqrt{k}$  so nimmt die Differentialgleichung die Form  $f'' = -\omega^2 f$  an und man kann leicht zwei Funktionen angeben, die diese Differentialgleichung lösen, nämlich  $s(t) = \sin \omega t$  und  $c(t) = \cos \omega t$ . Dann ist aber auch jede Linearkombination  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  eine Lösung der obigen Differentialgleichung.

Wir wollen nun die entscheidende Aussage beweisen, dass umgekehrt *jede* Lösung der Differentialgleichung zwangsläufig die obige Form haben muss:

Jede Lösung  $f$  der Differentialgleichung  $f'' = -\omega^2 f$  ( $\omega > 0$ ) ist notwendig von der Form  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  mit passenden Konstanten  $a, b$ .

Alle diese Funktionen sind periodisch mit der Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  und es gilt:  
 $b = f(0)$ ,  $a\omega = f'(0)$ .

Beweis: Es sei also  $f$  wie vorgegeben:  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$  für alle  $t$ . Gesucht sind Zahlen  $a, b$  mit  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ . Dies ist nur *eine* Gleichung für *zwei* Unbekannte. Da diese Gleichung aber für jedes  $t$  gelten soll, erhält man durch Ableiten daraus eine zweite:  $f'(t) = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t$ . Damit hat man ein System von 2 Gleichungen für 2 Unbekannte:

$$\begin{aligned} f(t) &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \\ f'(t) &= a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t \end{aligned}$$

Diese löse man wie üblich nach  $a, b$  auf. Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\omega \sin \omega t$ , der zweiten mit  $\cos \omega t$  und Addition ergibt

$$\begin{aligned} f(t)\omega \sin \omega t &= a\omega \sin^2 \omega t + b\omega \sin \omega t \cos \omega t \\ f'(t) \cos \omega t &= a\omega \cos^2 \omega t - b\omega \sin \omega t \cos \omega t \\ \implies f(t)\omega \sin \omega t + f'(t) \cos \omega t &= a\omega(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a\omega. \end{aligned}$$

Also

$$a\omega = f(t)\omega \sin \omega t + f'(t) \cos \omega t.$$

Genauso erhält man

$$b\omega = f(t)\omega \cos \omega t - f'(t) \sin \omega t.$$

Man überprüft leicht, dass die so gefundenen Terme für  $a, b$  die behauptete Darstellung in a) liefern. Man muss aber noch zeigen, dass  $a, b$  tatsächlich Konstanten sind und nicht von  $t$  abhängen!

Erst hierfür wird die Voraussetzung  $f'' = -\omega^2 f$  benutzt. Mit ihrer Hilfe zeigen wir, dass die für  $a, b$  (bzw.  $a\omega, b\omega$ ) gefundenen Funktionsterme die Ableitung 0 haben, also konstant sind:

$$\begin{aligned} (f(t)\omega \sin \omega t + f'(t) \cos \omega t)' &= f'(t)\omega \sin \omega t + f(t)\omega^2 \cos \omega t + f''(t) \cos \omega t + f'(t)\omega(-\sin \omega t) \\ &= f(t)\omega^2 \cos \omega t + (-\omega^2 f(t)) \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man, dass  $b\omega$  und folglich  $b$  konstant sind.

Die Bedeutung der Konstanten  $a, b$  erhält man durch Auswertung an der Stelle  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \implies f(0) = b, \\ f'(t) &= a \omega \cos \omega t - b \omega \sin \omega t \implies f'(0) = a \omega. \end{aligned}$$

Die behauptete Periodizität ergibt sich aus der  $2\pi$ -Periodizität der trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$ :

$$\omega(t + T) = \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \omega t + 2\pi \implies f(t + T) = f(t).$$

Um die (physikalischen) Eigenschaften von Funktionen der Form  $a \sin \omega t + b \cos \omega t$  erkennen zu können, wollen wir sie mit Hilfe der Additionstheoreme in eine Form bringen, an der man unmittelbar den Verlauf des Graphen und die wichtigen physikalischen Eigenschaften ablesen kann:

Jede Funktion  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  lässt sich als eine Sinusschwingung darstellen:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

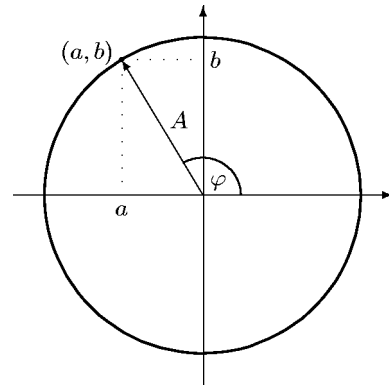
mit der *Amplitude*  $A \geq 0$ , der *Periodendauer*  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  und dem Phasenwinkel  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Konstanten ist in nebenstehender Skizze enthalten:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{A} = A \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

also  $A^2 = a^2 + b^2$  und im Falle  $A > 0$

$$\cos \varphi = \frac{a}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{A}.$$



Beweis der Behauptung mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = A \cos \varphi \cdot \sin \omega t + A \sin(\varphi) \cdot \cos \omega t.$$

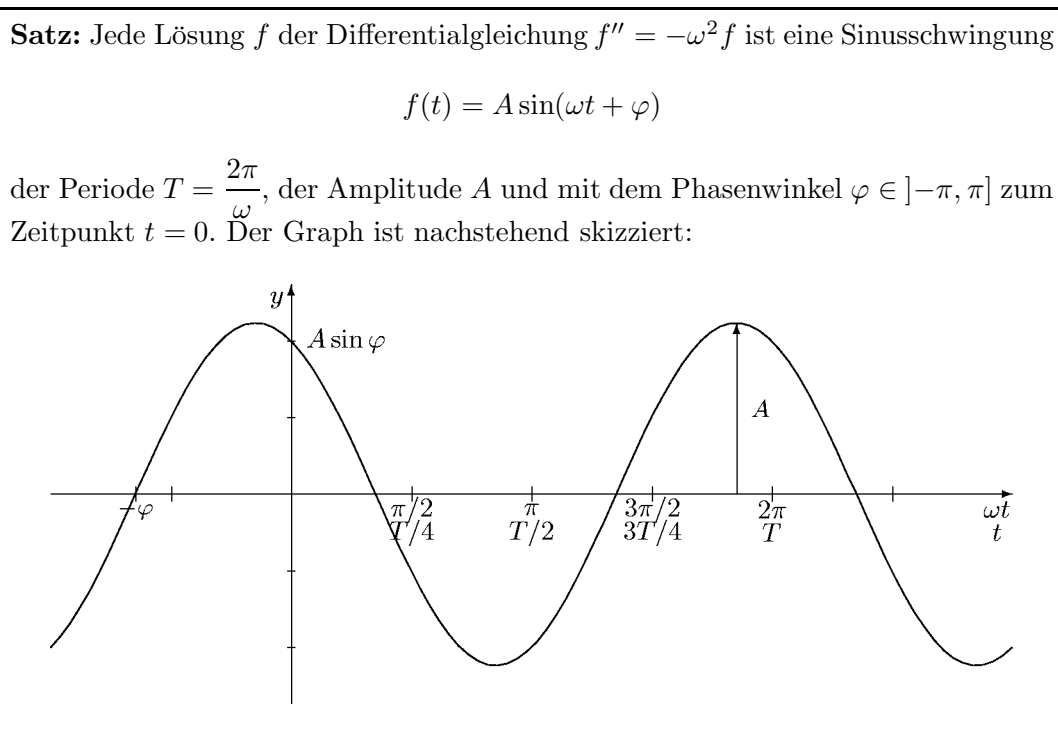
Dies ist gleich  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ , wenn folgendes gilt:

$$a = A \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad b = A \sin(\varphi).$$

Der Satz des Pythagoras ergibt  $a^2 + b^2 = A^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = A^2$  und im Falle  $A > 0$  ist der Winkel  $\varphi$  im Bereich  $-\pi < \varphi \leq \pi$  dann bestimmt durch

$$\frac{a}{A} = \cos(\varphi), \quad \frac{b}{A} = \sin(\varphi), \quad \text{bzw.} \quad (a, b) = (A \cos(\varphi), A \sin(\varphi)).$$

Kombiniert man beide vorangehenden Ergebnisse, so erhält man den wichtigen



Aus diesem Resultat erhalten wir nun eine fundierte Herleitung der Bewegungsgleichung mechanischer harmonischer Schwingungen. Eine harmonische Schwingung liegt definitionsgemäß vor, wenn die Beschleunigung  $a$  negativ proportional ist zur Elongation  $s$ . Da die Beschleunigung  $a$  die zweite zeitliche Ableitung der des Ortes (hier: der Elongation)  $s$  ist, ergibt sich für  $s$  die Differentialgleichung:

$$a = \ddot{s} = -ks,$$

deren Lösung nach obigem Resultat gegeben ist durch

$$s = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Dabei ist  $A$  die Amplitude, also  $A = \hat{s}$ . Bei Start in der Ruhelage mit positiver Geschwindigkeit (Phasenwinkel  $\varphi = 0$ ) erhält man  $s = \hat{s} \sin \omega t$ , wie früher in der Mechanik durch physikalische Überlegungen hergeleitet (siehe Mechanik-Skript S. 38).

**i. Die Thomsonsche Schwingungsformel.** Wir wollen nun dieses Resultat auf die nicht-mechanische Schwingung in einem Schwingkreis anwenden. Für den Schwingkreis hatten wir oben (Abschnitt g.) die folgende Differentialgleichung für die Ladung  $Q$  auf dem Kondensator hergeleitet:

$$\ddot{Q} = -kQ \quad \text{mit } k = \frac{1}{LC}.$$

Dies ist wieder die Schwingungsdifferentialgleichung, deren Lösung gegeben ist durch

$$Q = \hat{Q} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Die Ladung  $Q$  auf dem Kondensator ändert sich gemäß einer Sinusschwingung und für die Schwingungsdauer gilt die

<b>Thomsonsche Schwingungsformel:</b> $T = 2\pi\sqrt{LC}.$
--

Wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Ladung positiv maximal ist:  $Q_0 = \hat{Q}$ , so gilt  $\sin \varphi = 1$  und die Phase zu diesem Zeitpunkt ist  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Also:

$$Q = \hat{Q} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \hat{Q} \cos \omega t = \hat{Q} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (\text{falls } Q_0 = \hat{Q}).$$

Für die Spannung  $U = \frac{1}{C}Q$  gilt dann entsprechend

$$U = \hat{U} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (\text{falls } U_0 = \hat{U}),$$

während sich für die Stromstärke aus  $I = -\dot{Q}$  durch Ableiten ergibt

$$I = -\hat{Q} \cdot \omega (-\sin \omega t) = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \text{falls } I_0 = 0, \dot{I}_0 > 0.$$

Insbesondere ergibt sich daraus der maximale Stromfluss durch die Spule

$$\hat{I} = \frac{\hat{Q}}{\sqrt{LC}} = \frac{\hat{U}C}{\sqrt{LC}} = \hat{U} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Aus dieser letzten Beziehung können wir den Energieinhalt des Magnetfeldes einer stromdurchflossenen Spule bestimmen.<sup>1)</sup> Der Energieinhalt des geladenen Kondensators beträgt  $W = \frac{1}{2}C\hat{U}^2$ . Wenn der Kondensator entladen ist ( $U = 0$ ) ist der Stromfluss durch die Spule maximal:  $I = \hat{I}$ , und die gesamte Energie ist im Magnetfeld der Spule gespeichert. Also gilt  $W_{\text{magn}} = W_{\text{el}} = \frac{1}{2}C\hat{U}^2$ . Mit obiger Beziehung

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ergibt sich dann

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2}C\hat{U}^2 = \frac{1}{2}C\hat{I}^2 \cdot \frac{L}{C} = \frac{1}{2}L\hat{I}^2.$$

Übung: Stellen Sie eine kleine Formelsammlung für die Gesetzmäßigkeiten des Schwingkreises zusammen.

### Epilog: Die Grenzen der klassischen Physik Vom Lichtelektrischen Effekt zur Quantenphysik

---

<sup>1)</sup> In Übung (E12) 7. hatten wir dies bereits mit Hilfe der Integralrechnung aus dem Ausschaltstrom einer Spule hergeleitet.