Einführung in die Mechanik

für Studierende des Studienkollegs
an der RWTH Aachen

Unterrichtsbegleitende Skripten sowie
Übungen mit ausführlichen Lösungen

Norbert Klingen

Aachen 2006

Inhalt

I. Grundbegriffe der Mechanik

1. Grundlagen **1**
- a. Die Grundgrößen 1
- b. Präfixe und Einheitenumrechnung 1
- c. Kraft 2
- d. Masse und Gewicht 2
- e. Dichte 3
- f. Das Hooke'sche Gesetz 3
- g. Proportionalität 3

2. Druck **4**
- a. Definition 4
- b. Schweredruck 4
- c. Auftrieb 4
- d. Schwimmen 5

3. Arbeit und Energie **5**
- a. Arbeit 5
- b. Leistung 6
- c. Flaschenzug 6
- d. Energieerhaltung 6
- e. Schiefe Ebene 7
- f. Reibung 7

4. Wärmelehre **8**
- a. Wärme ist Energie 8
- b. Temperatur 8
- c. Die absolute Temperaturskala 8
- d. Wärme und Temperatur 10

5. Das Drehmoment. **10**
- a. Der Hebel 10
- b. Das Drehmoment 10

II. Kinematik – Bewegungslehre

6. Gleichförmige Bewegung **11**
- a. Geschwindigkeit 11
- b. Vektoren 11
- c. Überlagerung von Geschwindigkeiten 12
- d. Zerlegung in Komponenten 13
- e. Rechnerische Bestimmung 15

7. Beschleunigte geradlinige Bewegung. **17**
- a. Momentangeschwindigkeit 17
- b. Beschleunigung 17
- c. Zusammenhang zwischen Weg- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm 18
- d. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung 19
- e. Der freie Fall 20

8. Newtons Grundgleichung. **20**
- a. Kraft als Ursache von Beschleunigung 20
- b. Der gebremste Fall 21
- c. Die Newton'sche Grundgleichung der Mechanik 21
- d. Kinetische Energie 22

9. Wurfbewegungen **23**
a. Der waagerechte Wurf. 23
b. Der senkrechte Wurf. 26
c. Der schiefe Wurf. 26

10. Kräfte als Vektoren. **26**
a. Skalare und vektorielle Größen. 26
b. Resultierende Kräfte und Vektoraddition. 27
c. Trigonometrische Funktionen. 30

11. Gleichförmige Kreisbewegungen **31**
a. Definitionen. 31
b. Die Zentripetalbeschleunigung. 32
c. Das Newtonsche Gravitationsgesetz. 33
d. Die Masse von Himmelskörpern. 36

III. Schwingungen und Wellen

12. Schwingungen **37**
a. Bewegungsgesetze - ein Rückblick. 37
b. Harmonische Schwingungen. 38
c. Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung. 39
d. Die Bewegungsgesetze einer harmonischen Schwingung. 40
e. Das Fadenpendel. 42
f. Energie. 43

13. Wellen **44**
a. Schwingungsausbreitung. 44
b. Die Wellengleichung. 46
c. Longitudinale und transversale Wellen. 47
d. Beispiele: Schall und Licht. 48

14. Überlagerung von Wellen, Interferenz **49**
a. Stehende Wellen. 49
b. Reflektion und Eigenschwingungen. 50
c. Doppler-Effekt. 51
d. Das Huygenssche Prinzip, Brechung, Beugung. (in Planung) 53
e. Wellenlängenbestimmung durch Interferenz. (in Planung) 53

Epilog: Die Grenzen der klassischen Physik **53**
Von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zur speziellen Relativitätstheorie. 53

I. Grundbegriffe der Mechanik

1. Grundlagen

a. Die Grundgrößen. Will man die Natur nicht nur qualitativ beschreibend, sondern auch quantitativ erfassen, benötigt man physikalische Größen sowie Einheiten für deren Messung. Dabei baut man die physikalischen Größen von wenigen *Grundgrößen* ausgehend systematisch auf. Die fundamentalsten Grundgrößen sind die Größen für *Raum* und *Zeit* sowie die *Masse.* Die *Messung* dieser Grundgrößen ist Ihnen bekannt: die Zeit misst man mit geeigneten *Uhren,* die Länge durch Vergleich mit einem geeigneten *Maßstab* und Massen vergleicht man mittels einer *Balkenwaage.* (Siehe aber auch später Abschnitt c.)

Größe	Symbol	Einheit	Kürzel
Zeit	t	Sekunde	s
Länge	s	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Kraft	F	Newton	N
Fläche	A	Quadratmeter	m^2
Volumen	V	Kubikmeter	m^3

Die ersten *abgeleiteten* Größen des Raumes sind die *Fläche* sowie das *Volumen.* Als Flächeneinheit legt man das Quadratmeter (1 m^2) als die Fläche eines Quadrates mit 1 m Kantenlänge fest. Entsprechend ist ein Kubikmeter (1 m^3) das Volumen eines Würfels von 1 m Kantenlänge. Die gebräuchlichste Volumeneinheit ist das *Liter* (l), welches definiert ist als 1 Kubikdezimeter, also als das Volumen eines Würfels von einem Dezimeter (= 10 cm) Kantenlänge.

b. Präfixe und Einheitenumrechnung. Um kleinere oder größere Einheiten zu beschreiben, benutzt man sog. Präfixe (Vorsilben), die die Einheit um bestimmte Faktoren (Zehnerpotenzen) vergrößern oder verkleinern. Die wichtigsten derartigen Präfixe mit typischen Beispielen enthalten die nachfolgenden Tabellen.

Bruchteile:

Präfix	Zeichen	Faktor	Beispiele
dezi	d	1/10	
centi	c	1/100	cm
milli	m	1/1000	mm
mikro	μ	10^{-6}	μm
nano	n	10^{-9}	ns
pico	p	10^{-12}	

Vielfache:

Präfix	Zeichen	Faktor	Beispiele
Deka	da	10	
hekto	h	100	hl, hPa
kilo	k	1000	kg, km
Mega	M	10^6	MHz, MByte
Giga	G	10^9	GByte
Tera	T	10^{12}	

Man beachte, dass diese Präfixe sich *unmittelbar* auf die nachfolgende physikalische Einheit beziehen; eventuelle weitere Einheiten oder Rechenoperationen werden erst danach beachtet. So bedeutet zum Beispiel die Volumeneinheit von einem Kubikdezimeter (1 dm^3) das Volumen eines Würfels von 1 dm Kantenlänge. 1 dm^3 ist *nicht* ein Zehntel (dezi) von einem Kubikmeter! Wenn man zur Betonung Klammern schriebe, müsste man $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,(\mathrm{dm})^3$ schreiben. Diese enge Bindung der Präfixe an die unmittelbar folgende Einheit muss man bei der Umrechnung verschiedener Größen ineinander beachten, etwa wie in folgenden Beispielen:

$$1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,(\mathrm{dm})^3 = (10\,\mathrm{cm})^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3\,,$$
$$1\,\mathrm{m}^3 = (10\,\mathrm{dm})^3 = 10^3\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{l}\,.$$

Also ist ein Liter dasselbe wie 1000 Kubikzentimeter, oder 1 Kubikzentimeter gerade ein tausendstel Liter, d. h. ein Milliliter (1 ml). Und ein Kubikmeter umfasst gerade Tausend Liter. Bei

Vergrößerung der Kantenlänge um den Faktor 10 erhöht sich der Rauminhalt eines Würfels auf das $10^3 = 1000$-fache.
Ähnlich verhält es sich bei Flächeninhalten, nur dass statt dritter Potenzen zweite Potenzen (Quadrate) auftreten:

$$1\,\text{km}^2 = (1000\,\text{m})^2 = 1000^2\,\text{m}^2 = 1\,000\,000\,\text{m}^2\,,$$
$$1\,\text{m}^2 = (100\,\text{cm})^2 = 100^2\,\text{cm}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2\,.$$

c. Kraft. Kräfte kann man nicht sehen; man erkennt sie an ihren *Wirkungen.* Diese sind entweder *Formänderungen* oder *Bewegungsänderungen.* Es muss unbedingt betont werden, dass nicht die Bewegung selbst eine Kraft erfordert, sondern nur deren *Änderung,* wobei aber nicht nur die *Beschleunigung* oder *Verlangsamung* (allgemein die Veränderung der Geschwindigkeit), sondern auch die Änderung der Bewegungs*richtung* auf eine wirkende Kraft schließen lässt.

Die Formänderungen hat man dabei zur Grundlage der Kraftmessung gemacht: Kraftmesser sind im Prinzip *Federn,* deren Verlängerung unter der Krafteinwirkung man beobachten und messen kann. Zunächst möchte ich den Begriff der Kraft als eine *Grundgröße* ohne Rückführung auf andere physikalische Größen benutzen.

Die Einheit der Kraft ist das Newton (N). Wir beschreiben sie vorläufig mit Hilfe der *Gewichtskraft* F_G, die jeder Körper auf der Erde erfährt:

Eine Masse von 1 kg erfährt auf der Erde eine Gewichtskraft von 9,81 N.

Oder anders formuliert:

1 N ist die Gewichtskraft einer Masse von etwa 102 g.

Diese Festlegungen sind vorläufig. Der hier völlig willkürlich erscheinende Wert 9,81 wird sich im Rahmen der Kinematik als *Fallbeschleunigung* zwangsläufig ergeben. Wir werden dann die Kraft als eine aus Masse, Länge und Zeit *abgeleitete* Größe kennenlernen.

d. Masse und Gewicht. Diese beiden Größen werden umgangssprachlich nur sehr undeutlich, wenn überhaupt, unterschieden. Dabei sind sie jedoch physikalisch sehr verschieden. Jede *Masse* besitzt auf der Erde ein *Gewicht;* dieses ist eine *Kraft.* Die *Gewichtskraft* hat ihre Ursache in der Anziehungskraft der Erde, die diese auf jede *Masse* ausübt. Die Größe dieser Gewichtskraft F_G ist von der Masse abhängig. Genauer gilt: Das *Verhältnis* von Gewicht zu Masse ist an einem Ort konstant:

$$\frac{F_\text{G}}{m} = g \quad \text{konstant.}$$

Man nennt diese Konstante den *Ortsfaktor* g, da sie vom Ort abhängig ist. Wir legen dabei folgenden Normwert zugrunde:

$$\boxed{F_\text{G} = g\cdot m \qquad \text{mit dem Ortsfaktor} \quad g = 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}.}$$

Trotz dieses engen Zusammenhangs muss zwischen Masse und Gewicht deutlich unterschieden werden:
1. Die Masse eines Körpers ist an jedem Orte gleich, während sein Gewicht *ortsabhängig* ist.
2. Im Gegensatz zur Masse ist die Gewichtskraft (wie alle Kräfte) eine *gerichtete* (oder *vektorielle)* Größe. Gerichtete Größen können sich gegenseitig aufheben, ungerichtete (*skalare*) hingegen nicht. Ein Körper behält seine Masse, kann aber durchaus sein Gewicht verändern (Ortsabhängigkeit) oder sogar (durch andere Kräfte) ‘verlieren’ (Schwerelosigkeit, Schweben unter Wasser).

e. Dichte. Neben Masse und Gewicht eines Körpers ist das *Volumen* eine weitere charakteristische Größe. Der Zusammenhang zwischen Masse und Volumen hängt jedoch von dem betrachteten *Stoff* ab. Aus unserer täglichen Erfahrung wissen wir, dass das doppelte Volumen eines Stoffes auch die doppelte Masse hat, bzw. allgemein das *Verhältnis* von Masse zu Volumen (bei einem gegebenen Stoff) *konstant* ist. Diese Konstante nennt man die *Dichte* des Stoffes. Man bezeichnet sie mit dem griechischen Buchstaben ρ (rho).

$$\text{Dichte:} \qquad \rho = \frac{m}{V}\,, \qquad \text{Einheit:}\ \ 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,.$$

Ein fundamentaler Dichtewert ist die Dichte des Wassers. Sie beträgt

$$\boxed{\text{Dichte von Wasser: } 1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}} = 1\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}.}$$

(Bestätigen Sie die Gleichheit der 3 angegebenen Werte.)

f. Das Hooke'sche Gesetz. Kraftmesser sind Federn; deren Verlängerung zeigt die wirkende Kraft an. Dabei stellt man fest, dass doppelte Kräfte (in gleicher Richtung wirkend) eine doppelt so große Verlängerung, vierfache Kräfte eine vierfache Verlängerung bewirken und allgemein das *Verhältnis* von wirkender Kraft F zur Verlängerung s der Feder *konstant* ist. Die Größe dieser Konstante ist ein Maß für die *Härte* der Feder und wird daher *Federhärte* genannt:

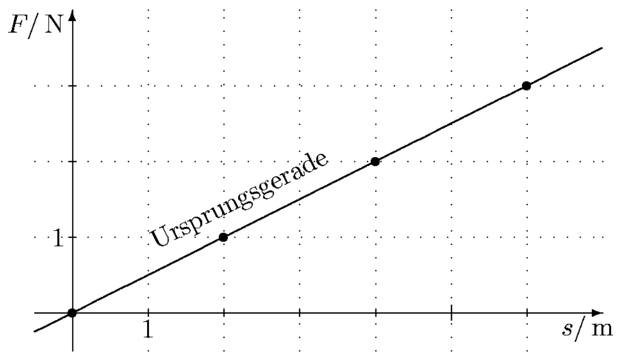
$$\text{Federhärte:} \qquad D = \frac{F}{s}\,, \qquad \text{Einheit: } 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\,.$$

Das umgekehrte Verhältnis $\dfrac{s}{F} = \dfrac{1}{D}$ ist dann ebenfalls konstant; der Wert dieser Konstanten $1/D$ ist ein Maß für die *Dehnbarkeit* der Feder.

g. Proportionalität. In den bisherigen Überlegungen hatten wir etliche Beispiele für physikalische Größen, die unter bestimmten Bedingungen in einem *festen Verhältnis* stehen. Man nennt zwei Größen *proportional,* wenn ihr Quotient konstant ist. Dabei bedeutet Konstanz, dass man bei verschiedenen Messungen dieser Größen stets denselben Quotienten erhält. Man nennt diesen konstanten Wert dann allgemein die *Proportionalitätskonstante.* In speziellen Fällen erhält sie spezielle Namen, wie etwa Dichte, Ortsfaktor, Federhärte u. ä. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung der uns bisher begegneten Proportionalitäten:

1.Größe	2. Größe	Proportionalitätsfaktor	Bedingungen
Gewicht F_G	Masse m	Ortsfaktor g	am festen Ort
Masse m	Volumen V	Dichte ρ	homogener Stoff
Federkraft F	Verlängerung s	Federhärte D	bestimmte Feder

Proportionalität von Größen erkennt man an Messreihen, indem man die Quotienten berechnet und feststellt, ob sie im Rahmen der Messgenauigkeit als konstant bezeichnet werden können. Eine zweite Möglichkeit ist die graphische Darstellung der Beziehung zwischen den Größen in einem Koordinatenkreuz. Wenn sich dabei eine *Gerade* durch den *Koordinatenursprung* ergibt (siehe z. B. Hooke'sches Gesetz), so liegt eine Proportionalität vor; der *Anstieg* der Geraden gibt dann die Proportionalitätskonstante an.



Der Begriff der Proportionalität ist auch deshalb so bedeutsam, da die Definition der meisten physikalischen Größen darauf beruht. Liegt unter bestimmten Bedingungen eine Proportionalität zweier bereits bekannter Größen vor, so wird dadurch ein Proportionalitätsfaktor bestimmt, der dann eine (neue) physikalische Größe darstellt. Neben den bereits genannten Beispielen seien vorausschauend erwähnt: elektrischer Widerstand, Leitfähigkeit, spezifische Wärme, Wärmeleitfähigkeit, ..., und unzählige mehr. Aber auch viele universelle physikalische Konstanten rühren von Proportionalitäten her (universelle Gaskonstante R, Gravitationskonstante G^*, Planck'sches Wirkungsquantum h, elektrische Feldkonstante ε_0 u. a.).

2. Druck

a. Definition. Unter *Druck* (speziell in Gasen und Flüssigkeiten) versteht man das Verhältnis von wirkender Kraft F zur Angriffsfläche A

$$\text{Druck:} \qquad p = \frac{F}{A}\,, \qquad \text{Einheit:} \quad 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{Pa} \quad \text{(Pascal)}$$

Die Einheit Pascal ist sehr klein, weshalb häufig die folgenden verwendet werden:

$$\text{Druckeinheiten:} \qquad 1\,\mathrm{hPa} = 1\,\mathrm{mbar}\,, \quad 1\,\mathrm{bar} = 100\,000\,\mathrm{Pa}.$$

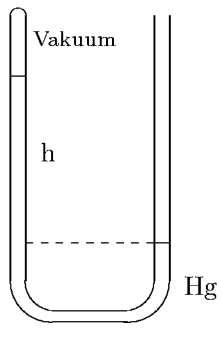
Die dadurch festgelegte Einheit $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ ist gleich dem Druck, den eine Kraft von 10 N (etwa das Gewicht einer Masse von 1 kg) auf einer Fläche von 1 cm^2 erzeugt. Dies ist etwa die Stärke unseres Luftdrucks.

b. Schweredruck. Unter dem Einfluss der Gravitation herrscht in allen Gasen und Flüssigkeiten der sog. *Schweredruck.* Er wird verursacht von dem Gewicht der über der Messfläche lastenden Gas-/Flüssigkeitssäule. Da Gas- und Flüssigkeitsteilchen *frei* gegeneinander beweglich sind, ist der Druck an einer Stelle *in allen Richtungen* gleich groß.

Man berechnet den Schweredruck in einer Flüssigkeit oder einem Gas wie folgt. Eine Flüssigkeitssäule mit der Querschnittsfläche A und der Höhe h hat das Volumen $V = A \cdot h$ und das Gewicht $F_\mathrm{G} = V \cdot g\rho$ (g der Ortsfaktor, ρ die Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases). Damit erhält man den Schweredruck am Fuße einer Flüssigkeitssäule der Höhe h

$$p = \frac{F_\mathrm{G}}{A} = \frac{g\rho \cdot V}{A} = g\rho \cdot \frac{A \cdot h}{A} = g\rho \cdot h\,.$$

Der Schweredruck steigt also mit der Eintauchtiefe, und zwar proportional dazu. Da durch die freie Beweglichkeit der Gas-/Flüssigkeitsmoleküle auf gleicher Höhe stets ein Druckausgleich stattfindet, ist der Schweredruck *nicht* von der *Form* des Gefäßes abhängig!



Bei bekannter Dichte kann man aus der Höhe einer Flüssigkeitssäule auf den Druck am Boden schließen. Darauf beruht das Prinzip eines herkömmlichen *Barometers* (Druckmessers) in Form eines einseitig offenen U-Rohrs, meist mit Quecksilber gefüllt. Auf Höhe der gestrichelten Linie herrscht in beiden Schenkeln der gleiche Druck p, rechts verursacht vom Luftdruck, links (wegen des Vakuums) allein von der Quecksilbersäule der Höhe h, also $p = h \cdot g\rho_\mathrm{Hg} = h \cdot g \cdot \rho_\mathrm{Hg}$. Bei einem Normluftdruck von 1013 mbar und $\rho_\mathrm{Hg} = 13,55\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ ergibt sich eine Höhe von $h = 76,2\,\mathrm{cm}$. Würde man statt Quecksilber Wasser ($\rho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) verwenden, würde die Wassersäule $10,33\,\mathrm{m}$ hoch steigen. Dies bedeutet auch, dass beim Tauchen der Wasserdruck mit je 10 m Tiefe um 1 bar steigt.

c. Auftrieb. Eine wichtige Konsequenz des mit der Tiefe zunehmenden und zugleich richtungsunabhängigen Schweredrucks ist das Phänomen des Auftriebs. Der *Auftrieb* ist eine der Gewichtskraft *entgegen* gerichtete Kraft, die jeder Körper erfährt, der in eine Flüssigkeit oder ein Gas eintaucht. Sie hat ihre Ursache darin, dass durch das Druckgefälle auf die Unterseite des Körpers eine größere Kraft ausgeübt wird als auf die Oberseite. Dadurch entsteht eine nach oben gerichtete Kraft, die *Auftriebskraft* F_{A}. Sie ist gleich dem Gewicht $F_{\mathrm{G,v}}$ der *verdrängten* Flüssigkeit:

$$\text{Auftrieb:} \qquad F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{G,v}} = V_{\mathrm{v}} \cdot g\rho_{\mathrm{Fl}}\,.$$

Dabei bezeichnet V_{v} das Volumen der vom Körper verdrängten Flüssigkeit bzw. des Gases, also das Volumen, mit dem der Körper eintaucht.

Die Frage, ob ein Körper in einer Flüssigkeit (oder einem Gas) *sinkt, schwebt* oder *aufsteigt,* hängt davon ab, ob der Auftrieb des *voll eingetauchten* Körpers kleiner, gleich oder größer als das Gewicht ist. Im voll eingetauchten Zustand ist $V_{\mathrm{v}} = V$ das Gesamtvolumen des Körpers, der Auftrieb also $F_{\mathrm{A}} = V \cdot g\rho_{\mathrm{Fl}}$, während das Gewicht $F_{\mathrm{G}} = V \cdot g\rho_{\mathrm{Kp}}$ beträgt. Es kommt also auf das Verhältnis der Dichten ρ_{Fl} der Flüssigkeit und ρ_{Kp} des Körpers an:

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{Kp}} > \rho_{\mathrm{Fl}} & \text{Sinken,} \\ \rho_{\mathrm{Kp}} = \rho_{\mathrm{Fl}} & \text{Schweben,} \\ \rho_{\mathrm{Kp}} < \rho_{\mathrm{Fl}} & \text{Aufsteigen.} \end{cases}$$

d. Schwimmen. Ein Körper, der in einer Flüssigkeit *aufsteigt,* wird schließlich *schwimmen.* Solange er in der Flüssigkeit ist, treibt ihn der größere Auftrieb nach oben, bis er aus der Flüssigkeit auftaucht. Dabei nimmt das Verdrängungsvolumen und damit der Auftrieb ab. Im Endzustand des Schwimmens stimmen Auftrieb und Gewicht überein:

$$\text{Schwimmen:} \qquad F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{G}}\,.$$

Dies bedeutet $V_{\mathrm{v}} \cdot g\rho_{\mathrm{Fl}} = V \cdot g\rho_{\mathrm{Kp}}$ und daher

$$\frac{V_{\mathrm{v}}}{V} = \frac{\rho_{\mathrm{Kp}}}{\rho_{\mathrm{Fl}}}\,.$$

Im Schwimmzustand eines Körpers verhält sich das Verdrängungsvolumen zum Gesamtvolumen wie die Dichte des Körpers zur Dichte der Flüssigkeit.

Für einen bestimmten Körper sind V und ρ_{Kp} fest, so dass das verdrängte Volumen *umgekehrt* proportional ist zur Dichte der Flüssigkeit. Auf dieser Tatsache beruht das Prinzip einer *Senkwaage* zur Bestimmung der Dichte von Flüssigkeiten. Man taucht die Senkwaage in die zu untersuchende Flüssigkeit. Die Eintauchtiefe im Schwimmzustand ist dann ein Maß für das verdrängte Volumen und damit für die Dichte der Flüssigkeit. Diese ist dann auf einer Skala an der Senkwaage ablesbar.

3. Arbeit und Energie

a. Arbeit. An einem Körper wird *Arbeit* verrichtet, wenn er durch die Wirkung einer Kraft F eine Wegstrecke s bewegt wird. Sind dabei Kraft- und Wegrichtung identisch, so definiert man die verrichtete Arbeit W als

$$\text{Arbeit:} \qquad W = F \cdot s\,, \qquad \text{Einheit: } 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{J}\ (\textit{Joule})$$

Ein Spezialfall ist die *Hubarbeit,* bei der ein Körper vom Gewicht F_{G} um die Höhe h angehoben wird:

$$\text{Hubarbeit:} \qquad W = F_{\mathrm{G}} \cdot h\,.$$

Der angehobene Körper hat dann aufgrund seiner erhöhten Lage selbst die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. So kann etwa ein auf die Höhe h angehobener Körper selbst benutzt werden, um einen anderen Körper anzuheben (etwa unter Verwendung eines Seils und einer an der Decke befestigten Rolle). Die so gewonnene *Fähigkeit, Arbeit zu verrichten,* nennt man auch *Energie;* in diesem speziellen Falle *Lageenergie.* Diese ist identisch mit der an dem Körper verrichteten Hubarbeit, also gilt für eine Masse m in der Höhe h über dem Bezugsniveau:

$$\text{Lageenergie:} \qquad W = F_{\mathrm{G}} \cdot h = m\,g\,h\,.$$

Physikalisch sind Arbeit und Energie identische Größen (mit derselben Einheit J); welches Wort man benutzt, ist eine Frage der Blickrichtung. Man sagt: An dem Körper wird Arbeit verrichtet; er erhält dadurch einen Energiezuwachs.

b. Leistung. Leistung ist ein Maß dafür, wie *intensiv* eine Arbeit verrichtet wird, das heißt wie schnell. Wird über einen Zeitraum hinweg kontinuierlich eine Arbeit verrichtet, so definiert man das Verhältnis von erbrachter Arbeit W zur benötigten Zeit t als *Leistung:*

$$\text{Leistung:} \qquad P = \frac{W}{t} \qquad \text{Einheit:} \quad 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W} \quad \text{(Watt)}\,.$$

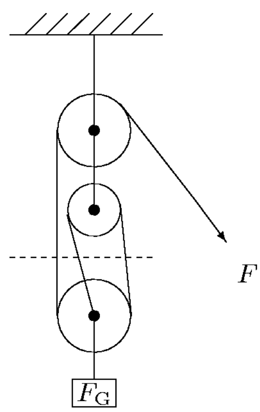
Als Folge dieser Einheitenfestsetzung ist die Einheit *Wattsekunde* Ws gleich der Energieeinheit Joule. Daraus ergibt sich auch, dass die häufig benutzte Einheit *Kilowattstunde* eine Energieeinheit ist:

$$1\,\mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{Wh} = 1000 \cdot 3600\,\mathrm{Ws} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}\,.$$

c. Flaschenzug. Ein Flaschenzug dient dazu, dem Menschen die Arbeit zu erleichtern. Bei genauerer physikalischer Betrachtung stellen wir jedoch fest, dass der notwendige *Kraft*einsatz reduziert wird, nicht jedoch der Energieaufwand.

Nachstehend ist ein Flaschenzug skizziert, wie wir ihn ähnlich im Unterricht untersucht haben. Dabei zeigte sich, dass die notwendige *Zugkraft* F am freien Seilende immer ein Bruchteil der *Last* F_{G} betrug. Dies beruht auf den folgenden beiden Tatsachen:
1. Da es sich um ein einziges straff gespanntes Seil handelt, liegt an allen Stellen des Seiles dieselbe Kraft F (mit ihrer gleichgroßen Gegenkraft) vor, also auch an den Schnittstellen mit der gestrichelten Linie.

2. Die angehängte Last F_{G} verteilt sich (bei diesem Flaschenzug) auf die *drei* Seilstränge, die von der gestrichelten Linie geschnitten werden. Daher teilt sich die Last in *drei* Teile auf. Diese drei Teilkräfte sind gemäß 1. gleich groß, und zwar gleich der Zugkraft F, also ist $F_{\mathrm{G}} = 3 \cdot F$.



Diese Überlegungen kann man auf jeden Flaschenzug anwenden. Dabei ergibt sich aus der Zahl n der Seilstränge, auf die sich die Last verteilt, das *Übersetzungsverhältnis* $1 : n$, in dem sich die Kraft reduziert. Im obigen Beispiel bei 3 Strängen also $1 : 3$.

d. Energieerhaltung. Ein Flaschenzug verringert also den benötigten *Kraft*aufwand. Der *Arbeits*aufwand wird dabei jedoch nicht reduziert. Will man nämlich die Last mit dem oben skizzierten Flaschenzug um die Höhe h anheben, so muss sich *jedes* der *drei* Teilstücke des Seiles, an dem die Last hängt, um die Strecke h verkürzen. Dazu muss man das Seil aber *insgesamt* um den *drei*fachen Betrag $3h$ verkürzen. Man muss also die Zugkraft F über den Weg $s = 3h$ anwenden. Dies bedeutet, dass sich der 'Zugweg' in demselben Verhältnis verlängert, wie sich die aufzuwendende Kraft verringert.
Der notwendige Arbeitsaufwand W bleibt daher unverändert:

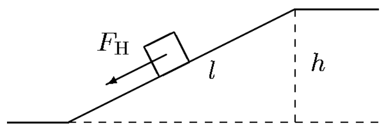
$$W = F \cdot s = F \cdot 3h = 3F \cdot h = F_{\mathrm{G}} \cdot h\,.$$

Der *mit* Hilfe des Flaschenzugs notwendige *Arbeitsaufwand* ist also genau gleich der *ohne* Hilfe zu verrichtenden direkten *Hubarbeit,* also gleich der *Lageenergie* des angehobenen Körpers.[1)]

[1)] Bei diesen Überlegungen haben wir von jeglichen Reibungskräften sowie dem Eigengewicht des Flaschenzugs abgesehen.

Dieses Ergebnis ist ein Beispiel für das allgemeine Prinzip der *Energieerhaltung.* Dieses kann man in den vielfältigsten Situationen beobachten und es ist eine der fundamentalen Gesetzmäßigkeiten der Physik.

e. Schiefe Ebene. An einer (reibungsfreien) schiefen Ebene kann man die Energieerhaltung ebenfalls experimentell überprüfen. Wir wollen hier jedoch einmal exemplarisch zeigen, wie das Prinzip der Energieerhaltung umgekehrt benutzt werden kann, um neue Zusammenhänge daraus *abzuleiten.* Wir werden also im folgenden, das (experimentell und theoretisch wohlfundierte) Prinzip der Energieerhaltung als gültig voraussetzen!



Ein Körper gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene wie nebenstehend skizziert. Der Körper habe das Gewicht F_G, gesucht ist die sogenannte *Hangabtriebskraft* F_H.

Um diese zu ermitteln, vergleichen wir zwei Methoden, den Körper von dem Bodenniveau auf die obere Höhe zu bringen:

1. Wir heben den Körper direkt hoch, der nötige Arbeitsaufwand ist die *Hubarbeit* $W = F_\mathrm{G} \cdot h$.
2. Wir ziehen der Körper über die schiefe Ebene hoch. Dazu müssen wir der Hangabtriebskraft entgegen eine gleichgroße Kraft $F = F_\mathrm{H}$ aufbringen, dies jedoch über die gesamte Länge l der schiefen Ebene hinweg. Der Arbeitsaufwand ist nun $F_\mathrm{H} \cdot l$.

Aufgrund des Prinzips der Energieerhaltung müssen die benötigten Energien übereinstimmen:

$$F_\mathrm{G} \cdot h = F_\mathrm{H} \cdot l \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{F_\mathrm{H}}{F_\mathrm{G}} = \frac{h}{l} \,.$$

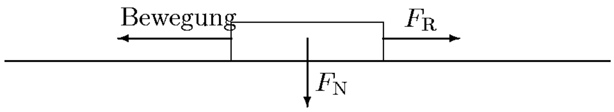
Man nennt dieses Verhältnis h/l die *Neigung* n der schiefen Ebene und erhält damit:

> *Das Verhältnis von Hangabtriebskraft* F_H *zu Gewichtskraft* F_G *ist gleich der Neigung* $n = h/l$ *der schiefen Ebene.*

f. Reibung. Wir wollen nun das Phänomen der Reibung, das wir oben außer Acht gelassen haben, genauer studieren. Was ist Reibung? Reibung ist eine *Kraft,* die auftritt, wenn zwei Körper sich *berühren* und gegeneinander *bewegen.* Die Reibungskraft F_R ist dabei der Bewegungsrichtung *entgegengesetzt.* Die Größe der Reibungskraft hängt von verschiedenen Faktoren ab:

- Beschaffenheit der Oberflächen (rauh, glatt, geschmiert)
- Art der Berührung (gleiten, rollen, haften)

Schließlich hängt die Reibungskraft davon ab, wie intensiv sich die beiden Körper berühren. Dies erfasst man durch die Kraft, die die Körper senkrecht zur Berührungsfläche aufeinander ausüben. Man nennt diese Kraft die *Normalkraft* F_N.



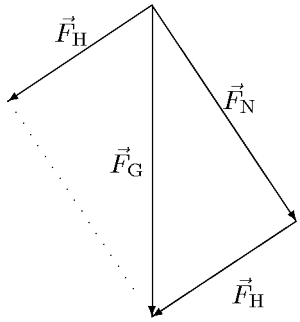
Genauere Untersuchungen zeigen, dass die Reibungskraft F_R proportional zur Normalkraft F_N ist. Die Proportionalitätskonstante $\mu = \dfrac{F_\mathrm{R}}{F_\mathrm{N}}$ nennt man den *Reibungskoeffizienten.* Es gilt also

$$F_\mathrm{R} = \mu \cdot F_\mathrm{N} \,.$$

Beachten Sie jedoch die unterschiedlichen Richtungen der beiden Kräfte! Der Reibungskoeffizient μ ist nun von der Art der Berührung abhängig: Man unterscheidet *Gleitreibung, Rollreibung* und schließlich *Haftreibung.* Unter Haftreibung versteht man den Widerstand gegen ein 'in-Bewegung-setzen' des Körpers. Die Haftreibungskraft ist also die kleinste Kraft, die erforderlich ist, den Körper in Bewegung zu versetzen; sie ist zugleich die *größte* Kraft, bis zu der keine Bewegung erfolgt. Diese maximale Kraft des Haftens ist ebenfalls proportional zur Normalkraft.

Die Erfahrung zeigt, dass die Reibungskoeffizienten μ für die Haftreibung am größten und für die Rollreibung am geringsten sind: $\mu_\mathrm{H} > \mu_\mathrm{G} > \mu_\mathrm{R}$.

Solange man Reibung bei horizontaler Unterlage betrachtet, ist die Bestimmung der Reibungskraft kein Problem, da die Normalkraft gleich der Gewichtskraft ist: $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}$. Wenn aber die Unterlage geneigt ist, muss man zunächst einmal die Normalkraft bestimmen. Dazu müssen wir die vektorielle[1]) Natur der Kraft beachten. Die Gewichtskraft F_G wirkt senkrecht nach unten zum Erdmittelpunkt. Sie zerlegt sich in 2 *Komponenten,* die Hangabtriebskraft F_H parallel zur schiefen Ebene und die Normalkraft F_N senkrecht zur schiefen Ebene. Da beide Kräfte zusammen die Gewichtskraft ergeben, erhält man nebenstehendes Kraftdreieck, bei dem die Hangabtriebs- und die Normalkraft einen rechten Winkel bilden. Wir können daher den Satz des Pythagoras benutzen, um aus der bekannten Hangabtriebskraft die Normalkraft zu berechnen:



$$F_\mathrm{N}^2 = F_\mathrm{G}^2 - F_\mathrm{H}^2 \iff F_\mathrm{N} = \sqrt{F_\mathrm{G}^2 - n^2 \cdot F_\mathrm{G}^2} = \sqrt{1-n^2} \cdot F_\mathrm{G} \,.$$

Hierbei ist n die Neigung der schiefen Ebene.

Unter Berücksichtigung der Reibung erhält man auf der schiefen Ebene die folgenden Kraftwirkungen:

$$F_\mathrm{H} = n \cdot F_\mathrm{G} \,, \qquad F_\mathrm{R} = \mu \cdot \sqrt{1-n^2} \cdot F_\mathrm{G} \,.$$

Diese sind in ihrer Richtung entgegengesetzt.

4. Wärmelehre

a. Wärme ist Energie. Bei den bisherigen Energieüberlegungen haben wir stets von sog. Energie*verlusten* abgesehen. Diese treten etwa bei Reibung auf, bei der Energie in Wärme umgewandelt wird. Wärme ist eine andere Form der Energie, und die sog. Energieverluste sind in Wahrheit lediglich Umwandlungen von einer Energieform in eine andere. Beachten Sie, dass in manchen Lehrbüchern im Rahmen der Wärmelehre das Symbol Q für Wärmemenge (= Energie) benutzt wird:

$$\text{Wärmemenge } Q \quad = \quad \text{Wärmeenergie } W \,.$$

b. Temperatur. Im Rahmen der Wärmelehre lernen wir nun eine weitere physikalische Grundgröße kennen, die *Temperatur.* Diese ist eine *Zustandsgröße,* d. h. sie kennzeichnet einen Zustand eines Körpers oder einer Stoffmenge.

Die Definition der Temperatur basiert auf der Tatsache, dass sich Stoffe bei Erwärmung *ausdehnen.* Man benutzt zur Temperaturmessung ein *Thermometer,* in dem die Volumenausdehnung einer Flüssigkeit die Temperatur anzeigt. Die *Celsius*skala ist wie folgt festgelegt: Der Schmelzpunkt von Wasser (bei Normalluftdruck) liegt bei $0\,^0$C und der Siedepunkt bei $100\,^0$C. Die Unterteilung in Grade erfolgt proportional zur Volumenänderung. Die Stärke der Ausdehnung ist vom Stoff (und auch vom betrachteten Temperaturbereich) abhängig. Für feste Stoffe gibt man den *Längenausdehnungskoeffizienten* und für Flüssigkeiten den *Volumenausdehnungskoeffizienten* an. Diese Werte geben die *relative* Längen- bzw. Volumenausdehnung je Grad Temperaturerhöhung an.

c. Die absolute Temperaturskala. Für Gase ist kein solcher Ausdehnungskoeffizient angegeben, da für sie weitergehende Gesetzmäßigkeiten gelten und die Ausdehnungskoeffizienten

---

[1]) Wir werden diesen Aspekt ausführlich in einem der nächsten Abschnitte studieren.

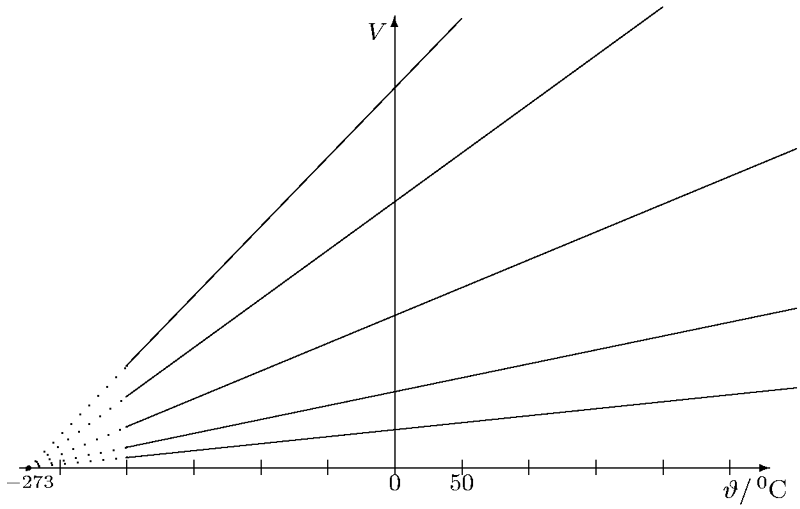
stoff*unabhängig* sind! Zunächst gilt für eine abgeschlossene Gasmenge mit konstantem Druck, dass die Volumen*änderung* ΔV und die Temperatur*änderung* $\Delta\vartheta$ proportional zueinander sind:

$$\text{Gesetz von Gay-Lussac:} \qquad \frac{\Delta V}{\Delta\vartheta} = const.$$

Für das Volumen V und die Temperatur ϑ selbst bedeutet dies einen *linearen* Zusammenhang, d. h. graphisch wird die Relation durch eine Gerade dargestellt. (Diese verläuft aber nicht durch den Koordinatenursprung, so dass keine Proportionalität zwischen V und ϑ vorliegt!) Ein linearer Verlauf des Graphen bedeutet aber eine Konstanz des Anstiegs, d. h. des Quotienten $\frac{\Delta V}{\Delta\vartheta}$:

Die Volumen*änderung* ist proportional zur Temperatur*änderung.*

Bestimmt man nun für verschiedene Gasmengen und auch verschiedene Gase diesen Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur, so ergibt sich etwa das nachstehende Bild. Extrapoliert man die sich ergebenden Geraden in den Bereich sehr niedriger Temperaturen, so stößt man auf folgende bemerkenswerte Tatsache: Unabhängig von Gasart und Gasmenge schneiden alle Geraden die Temperaturachse an *derselben* Stelle, bei $-273{,}15\,^0$C! Dies nennt man den *absoluten Nullpunkt.*



Man führt nun eine neue, die *absolute* Temperaturskala ein. Ihre Maßeinheit ist das Kelvin (K) und ihr Symbol ist T. Die neue Skala entsteht aus der Celsiusskala durch eine einfache Verschiebung, und zwar so, dass der absolute Nullpunkt die Temperatur 0 K erhält. Die Temperatur $\vartheta = -273{,}15\,^0\mathrm{C}$ ist dieselbe wie $T = 0\,\mathrm{K}$:

$$-273{,}15\,^0\mathrm{C} = 0\,\mathrm{K}\,.$$

Die Temperatur*unterschiede* sind jedoch in beiden Skalen identisch:

$$\frac{\Delta T}{\mathrm{K}} = \frac{\Delta\vartheta}{^0\mathrm{C}}\,.$$

Zusammengenommen ergibt dies die lineare Beziehung

$$\frac{T}{\mathrm{K}} = \frac{\vartheta}{^0\mathrm{C}} + 273{,}15\,.$$

Diese Verschiebung des Nullpunktes hat nun zur Folge, dass bzgl. der absoluten Temperaturskala die obigen Geraden alle durch den (neuen) Koordinatenursprung verlaufen; man erhält damit eine Proportionalität zwischen Volumen V und absoluter Temperatur T (bei konstantem Druck):

$$\text{Gesetz von Gay-Lussac:} \qquad \frac{V}{T} = const.$$

d. Wärme und Temperatur. Zur Temperaturerhöhung wird (Wärme-)Energie benötigt. Dabei hängt die benötigte Energie von der zu erwärmenden *Masse* m und der *Temperaturerhöhung* ΔT ab; genauer liegt eine Proportionalität vor:

$$\Delta W \sim m \cdot \Delta T\,.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist eine *Stoffkonstante,* die sog. *spezifische Wärmekapazität* c:

$$c = \frac{\Delta W}{m \cdot \Delta T}\,.$$

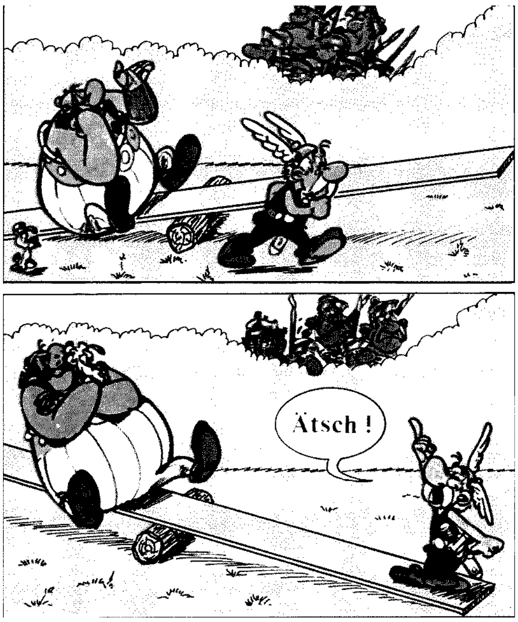
Sie gibt an, wieviel Energie im Verhältnis zur Masse und zur Temperaturerhöhung benötigt wird; sie wird angegeben in der Einheit $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$. Ein wichtiges Beispiel ist die spezifische Wärmekapazität von Wasser

$$c_{\mathrm{H_2O}} = 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\,.$$

Man benötigt also 4182 J um 1 l Wasser um ein Grad zu erwärmen. Diese Wärmemenge ist die nicht mehr gebräuchliche Energieeinheit *Kilokalorie* (1 kcal).

5. Das Drehmoment.

a. Der Hebel. Ein *Hebel* ist eine der ältesten Vorrichtungen um große Lasten anzuheben. Er besteht aus einem stabilen Stab oder Balken, der an einer Stelle fest aufliegt und sich um diesen Punkt drehen kann. Ein (spielerisches) Beispiel für die Wirkung eines solchen Hebels ist eine Kinderwippe wie in nebenstehender Comic-Zeichnung mit Asterix und Obelix. Ob ein solcher Hebel im Gleichgewicht ist, hängt nicht nur von den einwirkenden Kräften, sondern auch von den Angriffspunkten der Kräfte ab. Die Erfahrung zeigt, dass die Wirkung einer Kraft um so größer ist, je weiter der Angriffspunkt der Kraft vom Drehpunkt entfernt ist. Man nennt diesen Abstand die Länge des *Hebelarms* oder auch *Kraftarms.* Damit kann man eine erste einfache Form des Hebelgesetzes formulieren:
Eine Kraft und eine Last halten sich an einem Hebel das Gleichgewicht, wenn Kraft mal Kraftarm gleich Last mal Lastarm ist.



b. Das Drehmoment. Man definiert nun die folgende neue physikalische Größe

Das Drehmoment M einer an einem drehbaren Körper angreifenden Kraft F ist definiert als $M = F \cdot a$, wo a der Abstand des Drehpunktes von der Wirkungslinie der Kraft ist. Die Einheit ist 1 Nm.

Man beachte, dass der Hebelarm als Abstand des Drehpunktes von der Wirkungslinie im rechten Winkel zur Kraftrichtung steht.

Mit diesem Begriff formuliert sich das Hebelgesetz wie folgt:

Ein drehbarer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der rechtsdrehenden Drehmomente gleich der Summe der linksdrehenden Drehmomente ist.

Diese Tatsache hat vielfältige Anwendungen in der Praxis. So kann man Kräfte verändern, indem man eine kleine Kraft an einem langen Hebelarm *übersetzt* in eine große Kraft an einem kurzen Hebelarm, wie wir es etwa beim Fahrrad (Übung (M5)) gesehen haben.

II. Kinematik – Bewegungslehre

6. Gleichförmige Bewegung

a. Geschwindigkeit. Eine *gleichförmige* Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden. Dies bedeutet, dass der zurückgelegte Weg Δs zur dafür benötigten Zeit Δt proportional ist und somit der Quotient

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ konstant.}$$

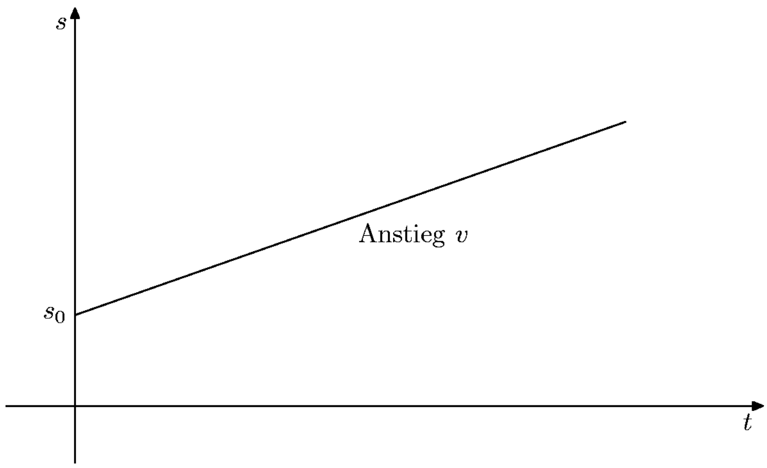
Dieser Quotient ist die **Geschwindigkeit** v der Bewegung. Die Einheit der Geschwindigkeit ist $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Stellt man die Wegstrecke s in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar, so bedeutet das konstante Verhältnis

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,,$$

dass das Weg-Zeit-Diagramm eine *Gerade* mit dem *Anstieg* v ist.

Weg-Zeit-Diagramm



Ist s_0 der Ort, an dem sich das bewegte Objekt zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ befindet, so wird diese Gerade durch das folgende Weg-Zeit-Gesetz beschrieben:

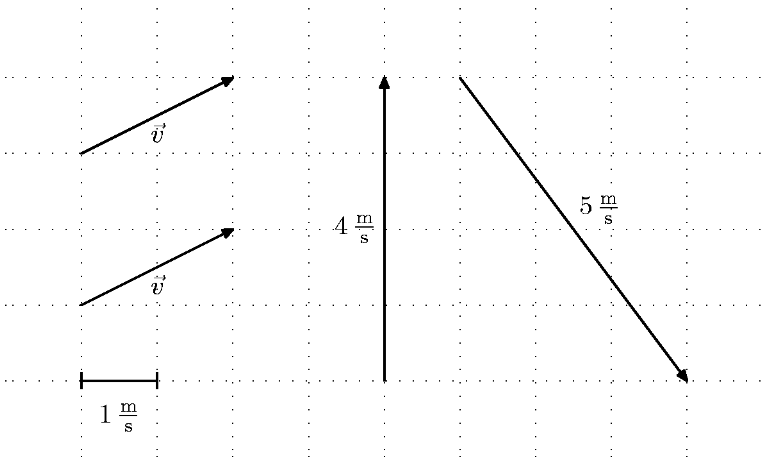
$$s = s_0 + v \cdot t\,.$$

b. Vektoren. An einfachen Beispielen (Kanufahrer auf einem Fluss, Flugzeug und Windeinfluss) haben wir uns verdeutlicht, dass es bei der Geschwindigkeit nicht nur auf den Betrag, sondern auch auf die **Richtung** ankommt: Die Geschwindigkeit ist eine *gerichtete* oder *vektorielle* Größe[1].

Gerichtete Größen stellt man durch **Vektoren** dar; diese werden veranschaulicht durch Pfeile, die zunächst die Richtung angeben, zugleich aber durch ihre Länge auch den **Betrag** der physikalischen Größe festlegen. Da eine vektorielle physikalische Größe durch Richtung und Betrag vollständig festgelegt ist, ist bei der graphischen Darstellung die Lage (Position) der

[1] Eine andere wichtige vektorielle Größe ist die Kraft; dagegen ist die Masse ein wichtiges Beispiel für eine ungerichtete, *skalare* Größe.

Pfeile unerheblich, wenn nur *Richtung* und *Länge* unverändert bleiben. So repräsentieren in der



Skizze die beiden mit $\vec{v}$ gekennzeichneten Pfeile denselben Geschwindigkeitsvektor. Allgemein bezeichnet man Geschwindigkeitsvektoren mit Symbolen wie $\vec{v}$, während der zugehörige Betrag des Vektors mit $v = |\vec{v}|$ bezeichnet wird. In obigem Beispiel also $v = |\vec{v}| = 2{,}23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Nachmessen bzw. Satz des Pythagoras).

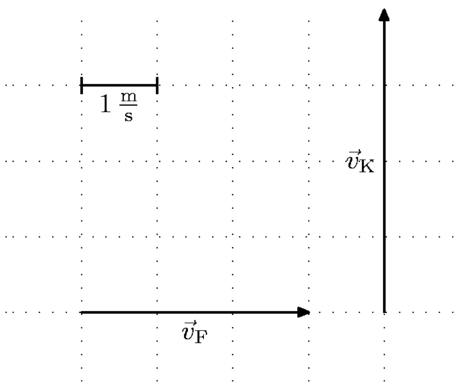
Unsere obige Definition der Geschwindigkeit einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung wird nun so erweitert, dass auch die vektorielle Natur erfasst wird:

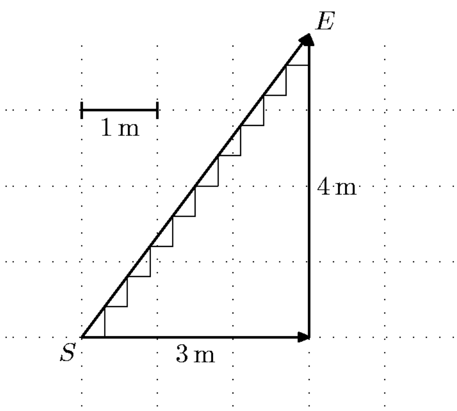
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}\,.$$

Da der Positionsunterschied $\Delta\vec{s}$ eine gerichtete Größe ist, ergibt sich auch für die Geschwindigkeit eine Richtung.

c. Überlagerung von Geschwindigkeiten. Wenn ein Kanufahrer auf einem Fluss paddelt, so überlagern sich die Geschwindigkeiten des Kanus und des fließenden Wassers und es ergibt sich eine **resultierende** Geschwindigkeit. Diese ist von der Richtung der Kanufahrt abhängig. Wir gehen einmal von einer Fließgeschwindigkeit des Flusses $v_\mathrm{F} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aus und unterstellen, dass der (durchtrainierte) Kanufahrer eine (konstante) Eigengeschwindigkeit $v_\mathrm{K} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ relativ zum Wasser erzielt. Solange der Kanufahrer einfach berg- oder talwärts steuert, ist die Antwort klar: Bei Bergfahrt ist seine resultierende Geschwindigkeit relativ zum festen Boden $v = v_\mathrm{K} - v_\mathrm{F} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, während sich bei Talfahrt $v = v_\mathrm{K} + v_\mathrm{F} = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ergibt.

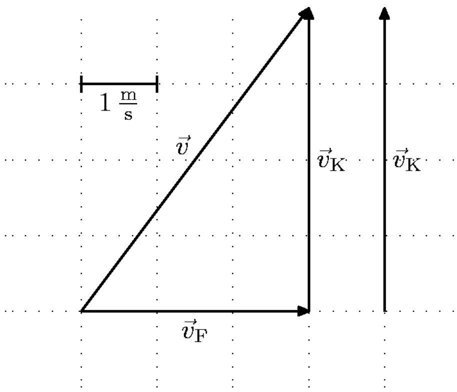
Steuert der Kanufahrer hingegen bei seiner Überfahrt ständig im rechten Winkel zum Fluss, so kann man die resultierende Geschwindigkeit nicht so einfach ermitteln. Hier muss man die beteiligten Geschwindigkeiten als Vektoren darstellen (linke Skizze).





Nun wird in jeder Sekunde der Strom den Kanufahrer um 3 m flussabwärts treiben, zugleich paddelt er aber mit eigener Kraft 4 m quer zum Fluss, so dass er in einer Sekunde vom Startpunkt

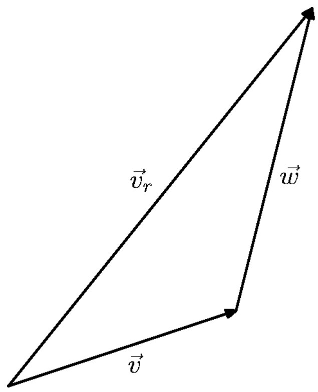
S zum Endpunkt E gelangt (rechte Skizze). Natürlich bewegt sich der Kanufahrer nicht längs der Katheten, sondern auf direktem Weg von S nach E, denn die Bewegungen von Fluss und Kanu finden natürlich nicht *nacheinander,* sondern gleichzeitig statt. Betrachtet man einmal statt einer Sekunde kleinere Zeitintervalle (etwa $\Delta t = 0{,}1\,\mathrm{s}$), so ergeben sich mit obiger Überlegung die kleineren Dreiecke, die jedoch insgesamt dieselbe Bewegungsrichtung bestimmen. Man erhält also den resultierenden Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Kanufahrers (relativ zum festen Boden) aus den beiden einzelnen Vektoren $\vec{v}_\mathrm{F}$ und $\vec{v}_\mathrm{K}$, indem man einen der Vektoren am Ende des anderen ansetzt und dann den Vektor vom Anfang des ersten zum Ende des zweiten bildet:



Aus einer genauen Skizze kann man so die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Kanufahrers ermitteln: Der Betrag ist $v = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Pythagoras) und die Richtung bildet einen Winkel von 53^0 mit der Fließrichtung des Flusses (Ausmessen).

Die obigen Überlegungen gelten nun ganz allgemein für die Überlagerung zweier Bewegungen und wir erhalten die folgende allgemeine Regel zur Bestimmung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors:

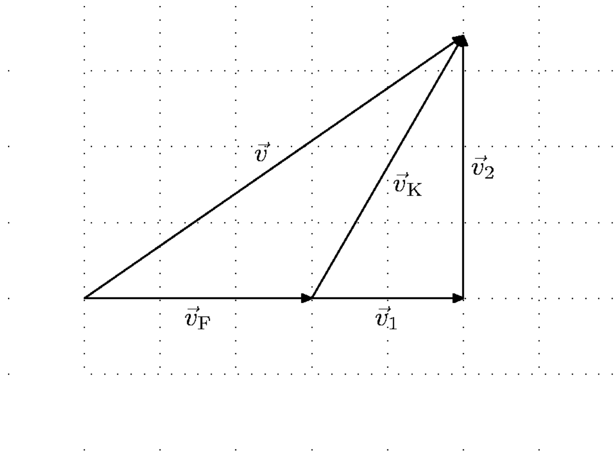
Überlagern sich zwei Bewegungen mit den Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, so erhält man den resultierenden Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_r$, indem man einen Vektor am Ende des anderen ansetzt und dann den Vektor $\vec{v}_r$ vom Anfang des ersten zum Ende des zweiten Vektors bildet:



Diese Operation nennt man *Vektoraddition* (vgl. auch nächsten Abschnitt).

d. Zerlegung in Komponenten. Ein wichtiges Mittel, Bewegungsvorgänge zu analysieren, liegt in der **Zerlegung** der beteiligten Geschwindigkeitsvektoren in **rechtwinklige Komponenten**. Im obigen Beispiel war die Geschwindigkeit des Kanus senkrecht zur Fließgeschwindigkeit. Dadurch konnte man mit dem Satz des Pythagoras die resultierende Geschwindigkeit v genau bestimmen. Wenn nun das Kanu nicht im rechten Winkel zum Fluss steuert, ist die Situation zunächst unübersichtlicher; sie kann jedoch durch Zerlegung in rechtwinklige Komponenten auf die in c. studierte Situation zurückgeführt werden.

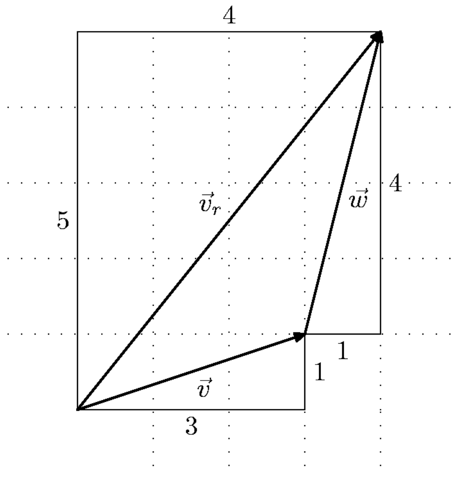
Betrachten wir zum Beispiel wieder unseren Kanufahrer, der diesmal jedoch einen Winkel von 60^0 mit der Strömungsrichtung des Flusses *steuert*[2]. Alle anderen Daten bleiben unverändert. Man erhält so die nachfolgende Skizze zur Bestimmung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$:



In dieser Skizze sind aber bereits auch die rechtwinkligen Komponenten $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ von $\vec{v}_{\mathrm{K}}$ eingetragen. Man zerlegt dazu den Geschwindigkeitsvektor des Kanufahrers in zwei Vektoren, einer parallel zum Fluss ($\vec{v}_1$) und einer im rechten Winkel zum Fluss ($\vec{v}_2$). Kennt man beide Komponenten v_1 und v_2, so ist damit auch $\vec{v}_{\mathrm{K}}$ (in Richtung und Betrag) festgelegt. **Ein Vektor ist durch seine Komponenten vollständig festgelegt.**

Außerdem kann man nun auch die Komponenten der resultierende Geschwindigkeit unmittelbar ablesen: Die Komponente von $\vec{v}$ in Flussrichtung ist $v_{\mathrm{F}} + v_1$, während die Komponente quer zum Fluss v_2 ist. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet man damit den Betrag $v = |\vec{v}|$, und auch die Richtung von $\vec{v}$ ist durch die Komponenten festgelegt (siehe unten bzw. Übung (M7), Aufgabe 3). Damit erhält man eine alternative Beschreibung zur Bestimmung des resultierenden Vektors:

Die Komponenten des resultierenden Vektors $\vec{v}_r$ sind die Summen der Komponenten der einzelnen Vektoren.



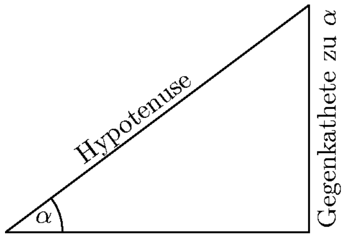
Aus diesem Grund wird der resultierende Vektor auch **Summenvektor** genannt:

$$\vec{v}_r = \vec{v} + \vec{w}\,.$$

[2] Dies ist nicht die tatsächliche Fahrtrichtung, sondern die vom Kanufahrer anvisierte Richtung.

e. Rechnerische Bestimmung. Zur rechnerischen Bestimmung der Komponenten benutzt man die trigonometrischen Funktionen Sinus (sin), Cosinus (cos) und Tangens (tan).

Da man dabei mit *spitzen* Winkeln (Winkel zwischen 0^0 und 90^0) auskommt, genügt die folgende Beschreibung dieser Funktionen am rechtwinkligen Dreieck. Sei α ein solcher Winkel. Wir betrachten dann ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α. In Bezug auf den Winkel α kann man dann die beiden Katheten unterscheiden, die *Ankathete* bildet einen Schenkel des Winkels α, während die *Gegenkathete* dem Winkel α gegenüberliegt:



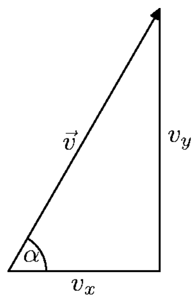
Mit diesen Bezeichnungen definiert man dann den

$$\begin{aligned}
\text{Sinus}: \quad & \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\
\text{Cosinus}: \quad & \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\,, \\
\text{Tangens}: \quad & \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\,,
\end{aligned}$$

wobei jeweils die *Längen* der angegebenen Dreiecksseiten gemeint sind. Die so definierten Werte sind *nicht* von der Größe des gewählten rechtwinkligen Dreiecks abhängig, da in Dreiecken mit übereinstimmenden Winkeln nach dem Strahlensatz auch die Seitenverhältnisse übereinstimmen (die Dreiecke sind ähnlich). Ergänzend legt man fest,[1)] dass $\sin 0^0 = \tan 0^0 = 0$ und $\cos 0^0 = 1$ ist.

Nun sind die obigen geometrischen Definitionen der trigonometrischen Funktionen nur insoweit nützlich, als man sie auch tatsächlich berechnen kann. Zunächst kann man nur für einige spezielle Winkel (30^0, 45^0 und 60^0) mit elementargeometrischen Überlegungen die entsprechenden Werte herleiten, allgemein benötigt man den Taschenrechner. Der Weg von obiger Definition der trigonometrischen Funktionen zu einer Beschreibung, die die Berechnung beliebiger Werte möglich macht, erfordert wesentliche Teile der Differentialrechnung und kann eines der Themen im Rahmen der Mathematik-Ausbildung des zweiten Semesters hier am Studienkolleg sein. Wir setzen im folgenden die vollständige Berechenbarkeit der trigonometrischen Funktionen voraus.

Aufgrund ihrer Definition am rechtwinkligen Dreieck erhält man für die Komponenten v_x, v_y eines Vektors $\vec{v}$:



$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{v_y}{v} \iff v_y = v \cdot \sin(\alpha)\,, \\
\cos(\alpha) &= \frac{v_x}{v} \iff v_x = v \cdot \cos(\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Damit sind die Komponenten v_x, v_y aus dem Vektor $\vec{v}$, der seinerseits durch v und α bestimmt ist, berechenbar. Und umgekehrt erhält man v und α aus den Komponenten v_x, v_y durch:

$$\begin{aligned}
v^2 = v_x^2 + v_y^2 &\iff v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,, \\
\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} &\iff \alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right).
\end{aligned}$$

[1)] Diese Festlegung ergibt sich aus der umfassenderen Beschreibung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis, wodurch sie für beliebige Winkel definiert werden.

Neben der Berechnung der Komponenten eines Vektors (auf der Basis der Definitionen von sin und cos am *rechtwinkligen* Dreieck) kann man auch Länge und Richtung von Vektoren mit Hilfe von Sinus- und Cosinussatz in *beliebigen* Dreiecken bestimmen.

Sinussatz:
In einem beliebigen Dreieck gilt (mit den üblichen Bezeichnungen):

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

bzw. als mehrgliedrige Proportion geschrieben:

$$\sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma) = a : b : c\,.$$

Die Seitenlängen stehen in demselben Verhältnis wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel.

Cosinussatz:
In einem beliebigen Dreieck gilt (mit den üblichen Bezeichungen):

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\,, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)\,, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\,. \end{aligned}$$

Die drei Formeln stellen ein und dieselbe Relation (nur mit unterschiedlichen Bezeichnungen) dar.

Beide Sätze beweist man, indem man ein beliebiges Dreieck mit einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt und darauf die Definitionen von Sinus und Cosinus anwendet.

Mit diesen beiden Sätzen kann man nun Beträge und Richtungen von Vektoren als Seitenlängen und Winkel in beliebigen Dreiecken berechnen. Wir unterscheiden verschiedene Fälle, je nachdem welche Daten des Dreiecks bekannt sind.

1. Drei Seiten:
In diesem Falle kann man mit dem Cosinussatz den Cosinus jedes Winkels berechnen, etwa

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

und daraus dann mit dem Arkuscosinus den Winkel α selbst.

2. Zwei Seiten und der *eingeschlossene* Winkel:
In diesem Falle berechnet man mit dem Cosinussatz die dritte Seite und geht dann weiter wie unter 1. vor.
Alternativ kann man auch versuchen, mit dem Sinussatz zunächst einen weiteren Winkel und dann die dritte Seite zu ermitteln. Dieser Weg ist aber nicht empfehlenswert, da im Bereich zwischen 0^0 und 180^0 der Sinuswert den zugehörigen Winkel nicht eindeutig bestimmt (vgl. 4.).

3. Eine Seite und zwei Winkel:
Mit zwei Winkeln sind wegen des Winkelsummensatzes alle drei Winkel bekannt und man kann mit dem Sinussatz aus einer Seite (etwa a) alle anderen berechnen:

$$b = \sin(\beta) \cdot \frac{a}{\sin(\alpha)}\,,\ c = \sin(\gamma) \cdot \frac{a}{\sin(\alpha)}\,.$$

4. Zwei Seiten und ein *gegenüberliegender* Winkel:
In diesem Fall ist besondere Umsicht notwendig. Zunächst berechnet man mit dem Sinussatz den

Sinuswert des zweiten gegenüberliegenden Winkels. Sind etwa α, c und a bekannt, so berechnet man

$$\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} \,.$$

Hieraus kann man jedoch i. a. γ nicht eindeutig bestimmen, denn im Bereich $0^0 < \gamma < 180^0$ gibt es i. a. *zwei* Winkel mit demselben Sinuswert. Durch Berechnung des Arkussinus mit dem Taschenrechner erhält man nur einen davon, nämlich $\gamma_1 \leq 90^0$. Daneben hat aber noch der Winkel $\gamma_2 = 180^0 - \gamma_1$ denselben Sinuswert. Ob auch dieser zweite Winkel möglich ist, erkennt man erst, wenn man mit dem Winkelsummensatz den dritten Winkel berechnet: $\beta = 180^0 - \alpha - \gamma_2 = \gamma_1 - \alpha$. Ist dieser negativ, so kommt γ_2 nicht in Frage; ist hingegen $\beta > 0^0$, so erhält man mit γ_2 eine *zweite* (!) Lösung des gestellten Problems.

7. Beschleunigte geradlinige Bewegung.

a. Momentangeschwindigkeit. Unsere bisherige Definition der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ setzte eine gleichförmige Bewegung voraus, das bedeutete, dass sich dabei für v immer derselbe Wert ergab, unabhängig vom Zeitintervall Δt. Liegt keine gleichförmige Bewegung vor, so wird durch die Gleichung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nur die *Durchschnittsgeschwindigkeit* während des Zeitintervalls Δt definiert.

Diese Durchschnittsgeschwindigkeit muss man unterscheiden von der sog. *Momentangeschwindigkeit.* Darunter will man die Geschwindigkeit verstehen, die ein Körper in einem bestimmten Moment hat. Nun benötigt man zur physikalischen Bestimmung einer Geschwindigkeit immer eine Zeit- und eine Streckenmessung, und das entstehende Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist dann eben eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Diese kommt der beabsichtigten Momentangeschwindigkeit um so näher, je kleiner das Zeitintervall Δt ist. Man muss also untersuchen, welchem Wert sich der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ schließlich *annähert,* wenn Δt immer kleiner wird und sich dem Wert 0 beliebig annähert. Diesen Annäherungsprozess nennt man *Grenzübergang,* und der dabei entstehende *Grenzwert* wird auch als Limes (lat., Grenze) bezeichnet:

$$\text{Momentangeschwindigkeit:} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \,.$$

Man beachte, dass dieser Grenzübergang kein physikalischer Prozess ist und die Momentangeschwindigkeit in letzter Konsequenz keine messbare Größe ist. Sie sind als gedankliches Konzept jedoch zur Analyse komplexer Bewegungsvorgänge äußerst nützlich: Unser Verständnis und die Beherrschung komplizierter Bewegungsabläufe (Himmelskörper, Raketen u.a.) sind ohne dieses Konzept der Momentangeschwindigkeit undenkbar.

Aufgrund dieser Definition erhält man die folgende geometrische Beschreibung der Geschwindigkeit, die nun ganz allgemein für beliebige Bewegungsvorgänge gilt:

Die Momentangeschwindigkeit v gibt zu jedem Zeitpunkt t den *Anstieg* der Weg-Zeit-Kurve an der Stelle t an.

b. Beschleunigung. Unter Beschleunigung versteht man umgangssprachlich eine Erhöhung der Geschwindigkeit. Physikalisch versteht man unter Beschleunigung ein Maß dafür, wie schnell sich eine Geschwindigkeit verändert. Man definiert:

$$\text{Beschleunigung:} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \,.$$

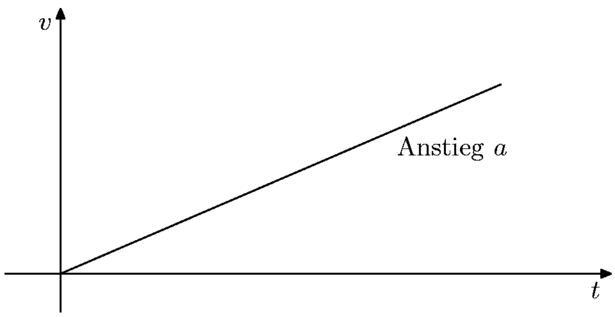
Dabei bezeichnet v_2, v_1 die Momentangeschwindigkeiten zu den Zeitpunkten t_2, t_1. (Insofern setzt die Definition der Beschleunigung den Begriff der Momentangeschwindigkeit voraus.) Die Einheit der Beschleunigung ergibt sich konsequenterweise als $1\,\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Dieser Begriff der Beschleunigung macht zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Wert von a nicht vom Messintervall Δt abhängt. Solche Bewegungsvorgänge nennt man *gleichmäßig beschleunigt:*

Unter einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung versteht man eine geradlinige Bewegung, bei der sich in gleichen Zeitabständen die Geschwindigkeit immer um den gleichen Wert ändert, bei der also die oben definierte Beschleunigung *konstant* ist.

Gemäß ihrer Definition ist die Beschleunigung a der *Anstieg* der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm daher eine Gerade. Wenn man eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit *Start aus der Ruhe* betrachtet, so ist $v = 0$ für $t = 0$ und man erhält eine Ursprungsgerade:

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



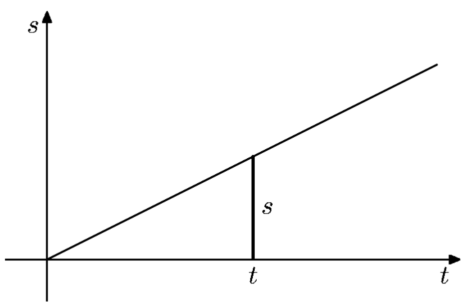
Und als **Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz** erhält man $v = a \cdot t$ (wieder für den Fall des Starts aus der Ruhe heraus). Unser Ziel ist es nun, aus dem jetzt bekannten Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz das Weg-Zeit-Gesetz zu ermitteln.

c. Zusammenhang zwischen Weg- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Diesen Zusammenhang haben wir in einer Richtung schon kennengelernt: Die Momentangeschwindigkeit v ist der Anstieg der Weg-Zeit-Kurve im betrachteten Zeitpunkt ('Moment') t. Wir wollen nun umgekehrt aus der Geschwindigkeits-Zeit-Kurve den zur Zeit t zurückgelegten Weg s ermitteln. Dazu kehren wir nochmals zur gleichförmigen Bewegung zurück, für die wir beide Gesetzmäßigkeiten kennen. Es sei v_0 die konstante Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung mit Start im Nullpunkt ($s = 0$ für $t = 0$). Dann gilt für die Momentangeschwindigkeit v die simple Gesetzmäßigkeit: $v = v_0$ konstant, und wir erhalten die folgenden Diagramme:

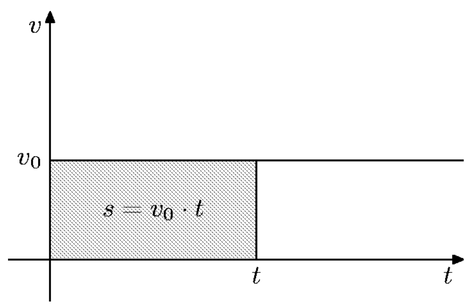
Gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0:

(bei Start im Koordinatenursprung)

Weg-Zeit-Gesetz: $s = v_0 \cdot t$



Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = v_0$

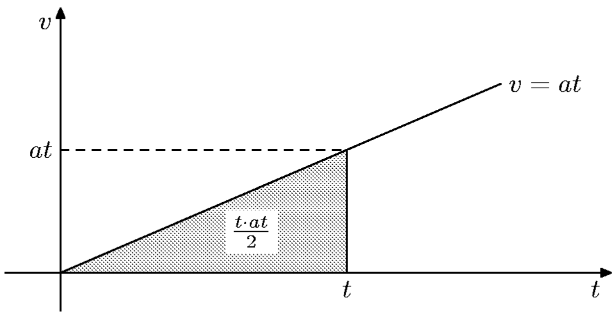


Fixieren wir nun einen Zeitpunkt t und markieren diesen in beiden Diagrammen. Dann ist die zu diesem Zeitpunkt zurückgelegte Wegstrecke im linken Diagramm als Strecke s eingezeichnet. Nach dem Weg-Zeit-Gesetz gilt dann $s = v_0 \cdot t$. Dieses Produkt $v_0 \cdot t$ kann man nun auch im rechten Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm veranschaulichen, es ist nämlich nichts anderes als der Flächeninhalt des markierten Flächenstücks. Dies führt nun zu der wichtigen Beschreibung des zurückgelegten Weges im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

> Die zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegte Wegstrecke ist gleich dem Flächeninhalt zwischen Geschwindigkeits-Zeit-Kurve und t-Achse in den Grenzen von t_1 bis t_2.

Die Formulierung dieser wichtigen Beziehung ist so gewählt, dass sie erstens nicht auf das Zeitintervall von 0 bis t beschränkt werden muss, und vor allem, dass sie nicht nur für gleichförmige, sondern ganz allgemein für beliebige Bewegungen anwendbar ist. Man beachte, dass man eine beliebige Geschwindigkeitskurve in viele sehr kleine Abschnitte zerlegen kann, in denen die Geschwindigkeit (nahezu) konstant ist und daher die zurückgelegte Strecke als Flächeninhalt gedeutet werden kann. Summiert man alle diese Rechtecksflächen, so ergibt sich die Gesamtfläche, die damit die zurückgelegte Strecke angibt.

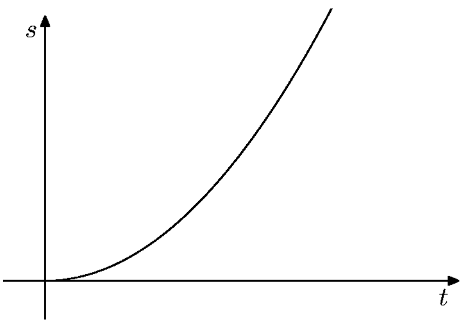
d. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Wir wenden nun diesen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Weg-Zeit-Diagramm auf eine beschleunigte Bewegung mit der konstanten Beschleunigung a an. Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine Ursprungsgerade mit der dem Anstieg a (siehe S. 18). Das Flächenstück darunter ist ein rechtwinkliges Dreieck der 'Breite' t und der 'Höhe' $v = at$, dessen Fläche also $\frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2}at^2$. Da diese Fläche den



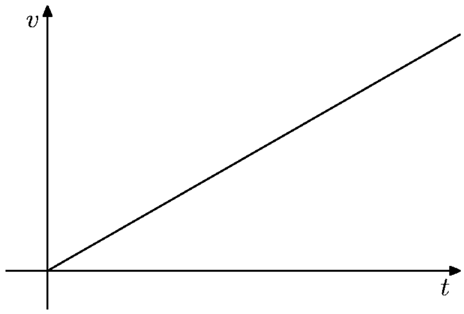
zurückgelegten Weg angibt, erhalten wir für eine konstant beschleunigte Bewegung (mit Start im Koordinatenursprung und aus der Ruhe, d. h. $s = 0$ und $v = 0$ für $t = 0$):

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung a:
(bei Start im Koordinatenursprung und aus der Ruhe)

Weg-Zeit-Gesetz: $s = \dfrac{1}{2}at^2$



Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v = at$



Wenn die Bewegung nicht aus der Ruhe heraus startet, sondern etwa mit der Ausgangsgeschwindigkeit v_0, so kommt zum obigen Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz eine konstante Geschwindigkeit hinzu:

$$v = v_0 + at$$

und im Weg-Zeit-Gesetz wird noch ein Anteil der gleichförmigen Bewegung $v_0 \cdot t$ addiert: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Legt man dann noch den Ausgangspunkt der Bewegung nicht an den Koordinatenursprung, sondern an die Stelle s_0, so erhält man schließlich die allgemeine Weg-Zeit-Gleichung einer konstant beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Startpunkt s_0:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,.}$$

e. Der freie Fall. Das fundamentale Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der freie Fall. Dass dies eine beschleunigte Bewegung ist, ist unmittelbar erkennbar (ein ruhender Körper setzt sich in Bewegung), dass jedoch eine konstante Beschleunigung vorliegt, kann man nicht unmittelbar 'sehen'. Dies muss man durch Messungen untersuchen.

Wenn man von der Definition ausgeht, muss man zum Nachweis der Konstanz der Beschleunigung überprüfen, ob die *Momentangeschwindigkeit* v zur Fallzeit t proportional ist. Wegen der Problematik der Messung der Momentangeschwindigkeit gehen wir einen anderen Weg und benutzen das oben hergeleitete Weg-Zeit-Gesetz für eine beschleunigte Bewegung. Aus der Beziehung $s = \frac{1}{2}at^2$ kann man nämlich $a = \frac{2s}{t^2}$ berechnen. Man misst also für verschiedene Fallstrecken s die Fallzeit t und untersucht, ob der sich ergebende Wert für $a = \frac{2s}{t^2}$ (annähernd) konstant ist.

Der von uns ermittelte Wert für die *Fallbeschleunigung* betrug etwas mehr als $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wir werden später im Zusammenhang mit Schwingungen eine genauere Methode zu ihrer Bestimmung kennenlernen. Wir werden ab jetzt immer den Normwert $a_g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für die Fallbeschleunigung zugrundelegen.

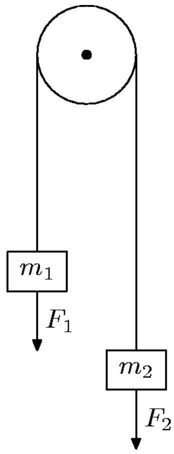
8. Newtons Grundgleichung.

a. Kraft als Ursache von Beschleunigung. Zu Beginn des Semesters haben wir die Kraft definiert über eine ihrer Wirkungen, die Formänderung. Kraftmesser sind Federn, deren Verlängerung unter der Krafteinwirkung man misst. Zur Eichung der Kraftmesser haben wir die Gewichtskraft benutzt: Die Gewichtskraft ist proportional zur Masse: $F_\mathrm{G} = g \cdot m$, der Proportionalitätsfaktor ist der (zunächst scheinbar willkürlich festgelegte) Ortsfaktor $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Wie es zu diesem Wert des Ortsfaktors kommt und wie die Kraft nicht als neue Grundgröße, sondern als aus den drei Grundgrößen *Masse, Länge* und *Zeit* abgeleitet definiert wird, wollen wir nun sehen.

Die Grundlage dafür ist die zweite fundamentale Wirkung von Kräften neben der Formänderung fester Körper, die *Änderungen des Bewegungszustandes.* So wird jeder Körper durch die Gewichtskraft beschleunigt, wenn er nicht durch eine Gegenkraft daran gehindert wird. Wir wollen nun die Kraft als Ursache der Beschleunigung untersuchen. Beim freien Fall haben wir gesehen, dass die Fallbeschleunigung von der Gewichtskraft *unabhängig* ist: Unterschiedlich schwere Körper fallen (im luftleeren Raum) gleich schnell. Wir haben am Fallrohr gesehen, dass selbst ein Wattebausch im Vakuum genauso schnell fällt wie ein Pfennigstück. Die Fallbeschleunigung ist also von der Masse und damit dem Gewicht des Körpers *unabhängig.*

Unsere Erfahrung zeigt uns jedoch, dass im allgemeinen die Beschleunigung eines Körpers sehr wohl von der einwirkenden Kraft abhängt: Einem leichten Fahrrad kann man mit wesentlich weniger Krafteinsatz eine bestimmte Beschleunigung erteilen als etwa einer schweren Schubkarre. Wir sehen an diesem Beispiel bereits, welche Größe neben der Kraft F für die Beschleunigung a noch von Bedeutung ist, nämlich die Masse m des beschleunigten Körpers. Um den Zusammenhang zwischen diesen Größen untersuchen zu können, muss man die beteiligten Größen variieren (F, m) und die entstehende Beschleunigung a ermitteln. Dies ist jedoch beim freien Fall nicht möglich: Ändert man die Masse m, so ändert sich zugleich auch die beschleunigende Gewichtskraft F_G, und zwar proportional. Wie wir gesehen haben, bleibt die Fallbeschleunigung a_g jedoch unverändert.

b. Der gebremste Fall. Wir müssen also eine andere Versuchsanordnung wählen, bei der wir Kraft und Masse unabhängig voneinander variieren können.



Dazu verwenden wir den 'gebremsten' Fall. An einer Masse (m_2) befestigen wir ein Seil, lenken es über eine feste Rolle und hängen an die andere Seite ein bremsendes Gegengewicht. Die Gewichtskraft F_1 *reduziert* dadurch die Kraft F_2, die wirkende Gesamtkraft ist $F = F_2 - F_1$. Die bewegte Masse wird dabei jedoch erhöht, sie ist die Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$.

Auf diese Art und Weise können wir F und m unabhängig voneinander variieren: Indem wir Massestücke von der einen Seite (m_1) auf die andere (m_2) verlagern, können wir die wirkende Kraft erhöhen, ohne dass sich die Gesamtmasse ändert. Aus Fallstrecke und Fallzeit ermitteln wir dann die auftretenden Beschleunigungen und können so die Abhängigkeit zwischen a und F (bei konstantem m) untersuchen.

Umgekehrt können wir die Gesamtmasse verändern, indem wir auf beiden Seiten die gleichen Massestücke hinzufügen, ohne dadurch den Gewichtsunterschied und damit die wirkende Kraft zu verändern. Auf diese Weise können wir die Abhängigkeit zwischen Beschleunigung a und beschleunigter Masse m bei gleichbleibender Kraft studieren.

c. Die Newton'sche Grundgleichung der Mechanik. Als Ergebnis erhalten wir auf diese Weise folgende Gesetzmäßigkeiten:

- Beschleunigung a ist proportional zur beschleunigenden Kraft F,
- Beschleunigung a ist umgekehrt proportional zur beschleunigten Masse m.

Oder zusammenfassend:

- Beschleunigung a ist proportional zu $\frac{F}{m}$.

Diese Proportionalität bedeutet, dass der Quotienten $\frac{a}{F/m} = \frac{am}{F}$ konstant ist, und dies wiederum besagt:

$$\boxed{\text{Kraft } F \text{ ist proportional zu } a \cdot m: \quad F \sim a \cdot m.}$$

Dieses *Newton'sche Grundgesetz der Mechanik* ist nun die Grundlage für die Definition der Kraft als *abgeleitete* Größe. Man definiert die Einheit der Kraft 1 N (1 Newton) so, dass in der Proportionalität $F \sim a \cdot m$ die Proportionalitätskonstante gleich 1 ist. Man erhält so

$$\boxed{\textbf{Newton's Grundgleichung der Mechanik:} \quad F = a \cdot m.}$$

bei gleichzeitiger Definition der

$$\boxed{\textbf{Krafteinheit:} \quad 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{kg}.}$$

Eine Kraft F hat also die Stärke 1 N, wenn sie einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erteilt. Damit ist die Kraft auf die elementaren Grundgrößen Länge s, Masse m und Zeit t zurückgeführt; sie ist eine abgeleitete Größe.

Für den freien Fall, bei dem die beschleunigende Kraft F die Gewichtskraft F_G und die erzielte Beschleunigung die Fallbeschleunigung a_g ist, erhält man so: $F_G = a_g \cdot m$. Vergleicht man mit der vorläufigen Kraftdefinition $F_G = g \cdot m$ mit dem Ortsfaktor g, so erkennt man:

$$\boxed{\text{Der Ortsfaktor } g \text{ ist in Wahrheit die Fallbeschleunigung } a_g \text{ am jeweiligen Ort.}}$$

Aus diesem Grunde werden wir ab sofort die Fallbeschleunigung einfach mit dem Symbol g bezeichnen.

d. Kinetische Energie. Für eine Beschleunigung ist Kraft notwendig. Wird also ein Körper mit konstanter Beschleunigung a beschleunigt, so muss während des gesamten Beschleunigungsvorganges dieselbe Kraft $F = am$ wirken. Dabei bewegt sich der Körper über eine Strecke $s = \frac{1}{2}at^2$ (t Beschleunigungszeit). Es muss also über diese Wegstrecke s hinweg die gleiche Kraft F wirken, dies erfordert *Energie.* Wir wollen nun die Energie bestimmen, die nötig ist, um einen Körper aus Ruhe auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen.

Zunächst gilt nach den obigen Vorüberlegungen $W = F \cdot s = am \cdot \frac{1}{2}at^2$. Dabei ist t die Beschleunigungszeit, die notwendig ist, um auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen, also $a = \frac{v}{t}$ und damit erhält man dann

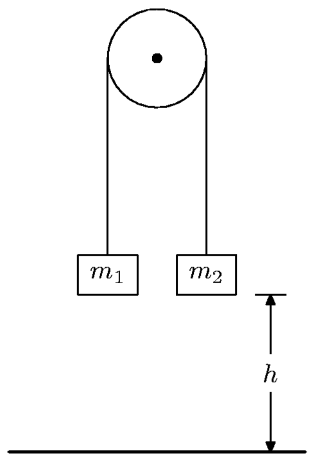
$$W = am \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Die Formel zeigt, dass die benötigte Energie W unabhängig davon ist, wie stark die Beschleunigung ist und wie schnell der Beschleunigungsvorgang erfolgt. Es kommt lediglich auf die erreichte Endgeschwindigkeit v (und natürlich auf die beschleunigte Masse) an. Man nennt diese Energie daher die Energie der Bewegung oder *kinetische* Energie:

$$\boxed{\textbf{Kinetische Energie:}\quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2.}$$

An vielen früheren Beispielen haben Sie gesehen, dass mit dem Prinzip von der Energieerhaltung viele physikalische Fragen überschaubar und einfach lösbar wurden. Dies gilt auch für die kinetische Energie.

Wir wollen das an dem nebenstehend skizzierten Beispiel demonstrieren: Mit welcher Geschwindigkeit schlägt die schwerere Masse auf dem Boden auf? Wir gehen davon aus, dass die Rolle so hoch hängt, dass nach oben genügend Freiraum vorhanden ist (mindestens die Höhe h).



Wir stellen eine Energiebilanz auf. In der skizzierten Ausgangsposition seien beide Massen in Ruhe, es ist also nur potentielle Energie vorhanden: $W_1 = W_{\text{pot}} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$ (bezogen auf den Boden als Nullniveau). Im Moment des Aufschlags von m_2 (wir unterstellen, dass m_2 die schwerere Masse ist) haben beide Massen dieselbe Geschwindigkeit v und damit die kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$. Zusätzlich ist aber auch noch potentielle Energie in der auf die Höhe $2h$ angehobenen Masse m_1. Damit ist die Energie beim Aufprall $W_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_1 \cdot g \cdot 2h$. Nach dem Prinzip der Energieerhaltung ist $W_1 = W_2$, also

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 + 2m_1gh\,.$$

Indem man diese Gleichung nach v auflöst, erhält man die Aufschlaggeschwindigkeit v:

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 + 2m_1gh\,. \\ \iff\ &(m_2 - m_1) \cdot gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 \\ \iff\ &v = \sqrt{2gh \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}\,. \end{aligned}$$

9. Wurfbewegungen

Wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit abgeworfen und bewegt sich dann allein unter dem Einfluss der Gravitation, so spricht man von einem *Wurf.* Man unterscheidet je nach Richtung der Anfangsgeschwindigkeit den *waagerechten* Wurf, den *senkrechten* Wurf und als Oberbegriff den *schiefen* Wurf.

Man analysiert einen solchen Bewegungsablauf, indem man ihn in zwei zueinander senkrechte Komponenten *zerlegt:* Die Bewegung in horizontaler Richtung (ohne Beschleunigung, also mit konstanter Geschwindigkeit) und in vertikaler Richtung (mit konstanter Fallbeschleunigung).

> Eine Wurfbewegung ist die Überlagerung einer gleichförmigen und einer konstant beschleunigten Bewegung.

Wir betrachten daher zur Beschreibung von Wurfbewegungen die folgenden Größen:

horizontale Bewegung:	v_x Momentangeschwindigkeit in horizontaler Richtung,
	x Entfernung vom Abschusspunkt in horizontaler Richtung,
vertikale Bewegung:	v_y Momentangeschwindigkeit in vertikaler Richtung,
	y Entfernung vom Abschusspunkt in vertikaler Richtung.

a. Der waagerechte Wurf. Unter einem waagerechten Wurf versteht man eine Wurfbewegung, bei der ein Körper in horizontaler Richtung mit einer Geschwindigkeit v_0 abgeschossen wird und dann der Erdbeschleunigung ausgesetzt wird.

Da die horizontale Bewegung gleichförmig ist, gelten die Bewegungsgesetze

$$v_x = v_0 \,, \quad x = v_{0x} \cdot t \,.$$

In vertikaler Richtung durchläuft der Körper eine konstant beschleunigte Bewegung (mit der Fallbeschleunigung g) aus der Ruhe heraus, also

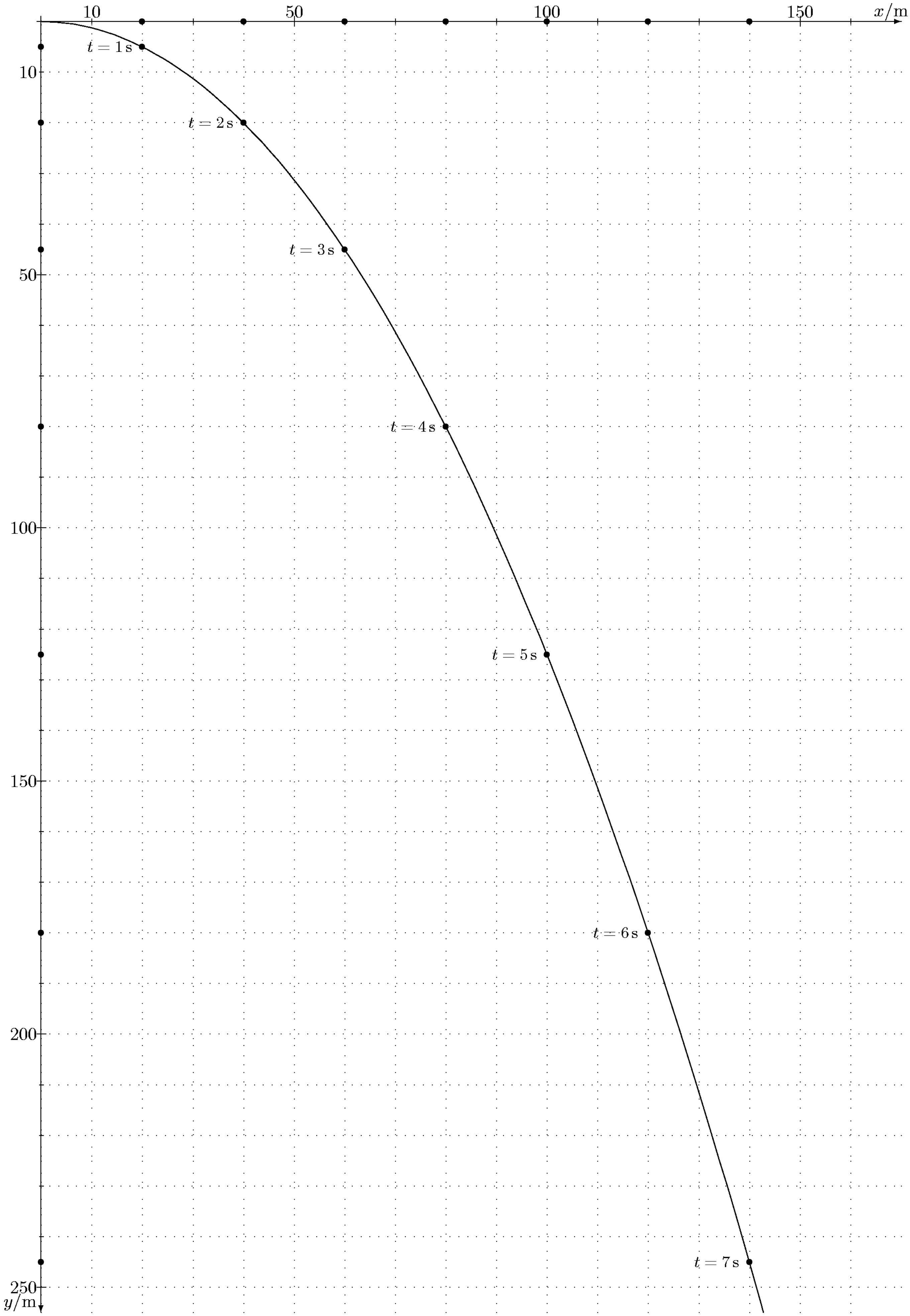
$$v_y = g \cdot t \,, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Dabei bezeichnet y die Abweichung von der Horizontale nach *unten.* Mit diesen Gesetzmäßigkeiten kann man nun die Bewegung eines Körpers im waagerechten Wurf genau analysieren.

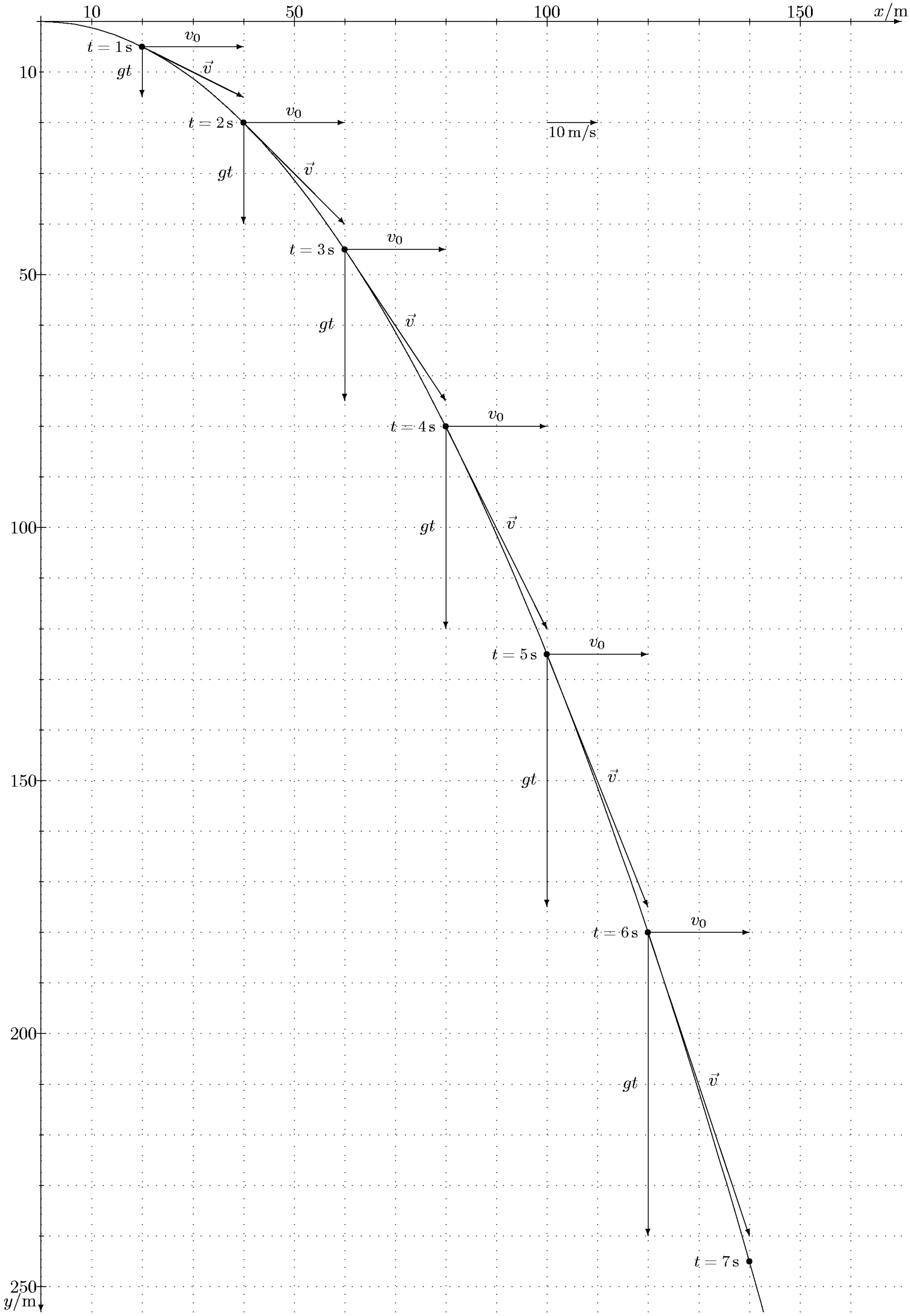
Zunächst einmal kann man zu jedem Zeitpunkt die Position des Körpers bestimmen. Die nachfolgende Skizze auf S. 24 zeigt die so entstehende Bahnkurve (für $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Dieses Bild entsteht, indem man für verschiedene Zeitpunkte den horizontal zurückgelegten Weg $x = v_0 \cdot t$ auf der x-Achse und die vertikal zurückgelegte Fallstrecke $y = \frac{1}{2} g t^2$ auf der y-Achse markiert (in der Skizze für die Zeitpunkte $t = 1\,\mathrm{s}$ bis $t = 7\,\mathrm{s}$ hervorgehoben). Aus den beiden Koordinaten ergeben sich dann die Positionen des Körpers zum jeweiligen Zeitpunkt und daraus dann insgesamt die Bahnkurve. Beachten Sie, dass auf der horizontalen Achse die markierten Punkte immer im gleichen Abstand liegen, da die Bewegung in horizontaler Richtung eine konstante Geschwindigkeit hat. In vertikaler Richtung wachsen die Abstände, da in dieser Richtung die Bewegung konstant beschleunigt wird; die Punkte auf der vertikalen Achse stellen im Sekundenabstand die Positionen eines frei fallenden Objektes dar.

Aber nicht nur die *Position* des Körpers in der Wurfbewegung, sondern auch die jeweilige *Momentangeschwindigkeit* kann man genau ermitteln. Man muss dazu den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ aus seinen Komponenten (horizontale Komponente $v_x = v_0$ und vertikale Komponente $v_y = gt$) vektoriell zusammensetzen. Dies ist in der zweiten großen Skizze auf S. 25 für die Zeitpunkte ($t = 1\,\mathrm{s}$ bis $t = 6\,\mathrm{s}$) dargestellt. Für den Geschwindigkeitsbetrag v und den Winkel α, den der momentane Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ mit der Horizontalen bildet, gilt dann (gemäß dem Satz des Pythagoras bzw. der Definition des Tangens):

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \,, \quad \alpha = \arctan(\frac{v_y}{v_x}) \,.$$



10
50
100
150
x/m
t = 1 s
t = 2 s
t = 3 s
t = 4 s
t = 5 s
t = 6 s
t = 7 s
10
50
100
150
200
250
y/m



10
50
100
150
x/m
t = 1 s
v0
gt
v
t = 2 s
10 m/s
t = 3 s
t = 4 s
t = 5 s
t = 6 s
t = 7 s
10
50
100
150
200
250
y/m

Wie man mit den obigen Gesetzmäßigkeiten des waagerechten Wurfes diverse physikalisch-praktische Fragen beantworten kann, haben wir in den Übungen behandelt.

b. Der senkrechte Wurf. Hierbei wird ein Körper vertikal abgeschossen und dann der Fallbeschleunigung ausgesetzt. Im Grunde handelt es sich dabei um einen freien Fall, jedoch hat man hier zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht die Geschwindigkeit Null, sondern es liegt eine Startgeschwindigkeit v_0 vor. Ist diese Startgeschwindigkeit nach oben gerichtet (wird der Körper also senkrecht nach oben abgeschossen), so wird durch die Fallbeschleunigung g die Bewegung abgebremst. Man erhält so für die Momentangeschwindigkeit

$$v_y = v_0 - gt\,.$$

Für die Entfernung y vom Abschusspunkt in vertikaler Richtung nach *oben* gilt dann

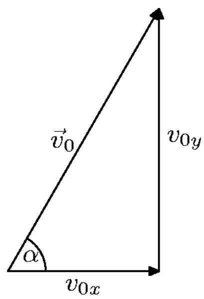
$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Der erste Bestandteil $v_0 t$ in dieser Formel gibt den Weg an, der infolge der gleichförmigen Bewegung ohne Berücksichtigung der Fallbeschleunigung zurückgelegt würde. Diesem entgegen wirkt der freie Fall und die entsprechende Fallstrecke wird daher subtrahiert.

Wieder haben wir in den Übungen gesehen, wie man mit diesen Bewegungsgleichungen konkrete Fragen (Steigzeit, Steighöhe, Aufschlaggeschwindigkeit u. a.) beantworten kann. Siehe dazu Übung (M11), Aufgabe 1, in deren Lösung neben den konkreten numerischen Ergebnisse das systematische Vorgehen ausführlich dargestellt ist.

c. Der schiefe Wurf. Der schiefe Wurf umfasst beide zuvor behandelten Fälle als Spezialfälle. Hier wird ein Körper mit einer beliebigen Geschwindigkeit v_0 in beliebiger Richtung abgeschossen und dann dem freien Fall überlassen. Auch hier zerlegt man den Bewegungsablauf in zwei zueinander senkrechte Komponenten, die horizontale gleichförmige Bewegung und die vertikale Fallbewegung mit einer Startgeschwindigkeit. Damit ist dieser Bewegungsablauf auf die oben behandelten Fälle zurückgeführt, wenn man nur die beiden Komponenten v_{0x} und v_{0y} der Abschussgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ kennt.

Diese beiden Komponenten ermittelt man vektoriell aus Betrag und Richtung des Abschussgeschwindigkeitsvektors $\vec{v}_0$. Sind also $v_0 = |\vec{v}_0|$ und der Winkel α in nebenstehender Skizze bekannt, so erhält man



$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha\,, \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha\,.$$

Ausgehend von diesen Geschwindigkeitskomponenten hat man dann die Bewegungsgleichungen

	horizontal	vertikal
Weg	$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$	$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$
Geschwindigkeit	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$

Hieraus kann man dann Wurfdauer, Wurfweite, Steighöhe, Steigzeit ähnlich wie beim waagerechten und senkrechten Wurf berechnen. (Siehe dazu Übung (M12), Aufgabe 5)

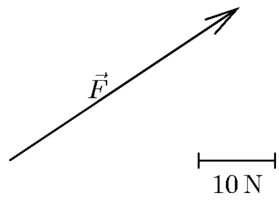
10. Kräfte als Vektoren.

a. Skalare und vektorielle Größen. Eine der grundlegenden Unterscheidungen physikalischer Größen ist die Unterscheidung zwischen *skalaren* und *vektoriellen* Größen. Während eine skalare Größe allein durch Maßzahl und Maßeinheit festgelegt ist, benötigt man für vektorielle Größen *zusätzlich* eine *Richtung* im Raum. Ein herausragendes Beispiel für eine vektorielle

Größe ist die Kraft. Entscheidend für die Wirkung einer Kraft ist nicht nur ihre Stärke, sondern auch ihre Richtung. So verstärken sich Kräfte, wenn sie in gleicher Richtung wirken, während entgegengesetzt gerichtete Kräfte sich abschwächen, ja sogar völlig aufheben können.

Solange man nur Kräfte betrachtet, die sich nur in ihrer *Orientierung* unterscheiden, also die *gleiche* oder *entgegengesetzte* Richtung haben, kann man die Wirkung zweier Kräfte rechnerisch (durch Addition oder Subtraktion) ermitteln. Dies haben wir bisher etwa bei der Behandlung der Reibung oder von durch Seile übertragenen Kräften erfolgreich angewendet.

Will man jedoch die Wirkung von zwei Kräften unterschiedlicher Richtung ermitteln, so kommt man nicht mehr mit einfachen 'Zahlenrechnungen' aus, man muss die Kräfte als *Vektoren* behandeln und benötigt *Vektorrechnung.* In vereinfachter Form haben wir dies bereits bei der Bestimmung der Normalkraft an einer schiefen Ebene benutzt, indem wir den Satz des Pythagoras angewendet haben.



Die *Richtung* und *Orientierung* einer Kraft wird durch einen *Pfeil* dargestellt. Ein Pfeil ist gegeben durch einen Anfangs- und einen Endpunkt. Die Gerade durch die beiden Punkte gibt die *Richtung* an, die Festlegung von Anfang und Ende bestimmt die sog. *Orientierung.* Die *Länge* des Pfeils ist ein Maß für die Stärke der Kraft, wobei die Umsetzung der Länge in eine Kraft durch einen *Maßstab* festgelegt wird. Damit ist die Kraft ein *Vektor* im Sinne der Mathematik, festgelegt allein durch *Länge, Richtung* und *Orientierung.*

Insbesondere hat ein Vektor keine bestimmte *Lage* im Raum, vielmehr kann er durch Pfeile an beliebigen Stellen dargestellt werden, wenn diese nur in Länge, Richtung und Orientierung übereinstimmen.

Vektorielle Größen werden in der Physik mit einem über das Symbol gesetzten Pfeil gekennzeichnet: $\vec{F}$ bezeichnet also einen Kraftvektor. Ohne den Pfeil bezeichnet F nur den Betrag des Vektors (die Stärke der Kraft): $F = |\vec{F}|$.[1)]

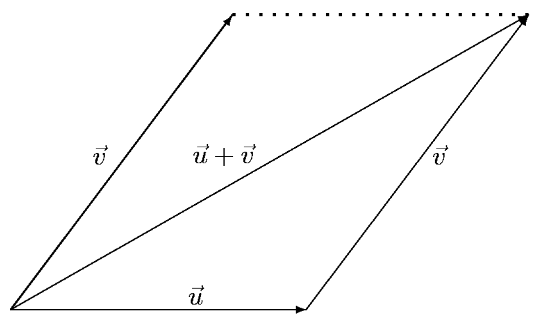
b. Resultierende Kräfte und Vektoraddition. Greifen nun zwei Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ an demselben Massenpunkt an, so bestimmt man die resultierede Kraft $\vec{F}_r$ durch *Vektoraddition:* $F_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Wir wollen diese hier zunächst beschreiben. Warum dies so ist, werden wir erst im Rahmen der Kinematik klären.

1. Geometrische Beschreibung der Vektoraddition:
Zwei Vektoren werden *addiert,* indem man beide als Pfeile mit demselben Anfangspunkt darstellt und zu einem Parallelogramm ergänzt. Die vom gemeinsamen Anfangspunkt beider Vektoren ausgehende Diagonale des Parallelogramms gibt den Summenvektor an.

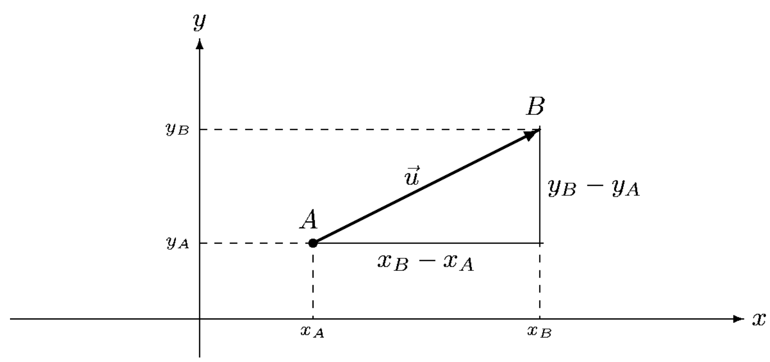
2. Geometrische Beschreibung der Vektoraddition:
Zwei Vektoren werden *addiert,* indem man sie zunächst als Pfeile darstellt, und zwar so, dass der zweite Pfeil am Ende des ersten ansetzt. [Man beachte dabei, dass man Vektoren durch Pfeile an verschiedenen Stellen darstellen kann, wenn nur Länge, Richtung und Orientierung unverändert bleiben.] Verbindet man nun den Anfang des ersten mit dem Ende des zweiten Pfeils, so erhält man den Summenvektor.
Man erkennt, dass die 2. Vorschrift eine Hälfte des unter 1. beschriebenen Parallelogramms darstellt. Diese 2. Beschreibung ist besonders verständlich für ortsbasierte Vektoren wie Ge-

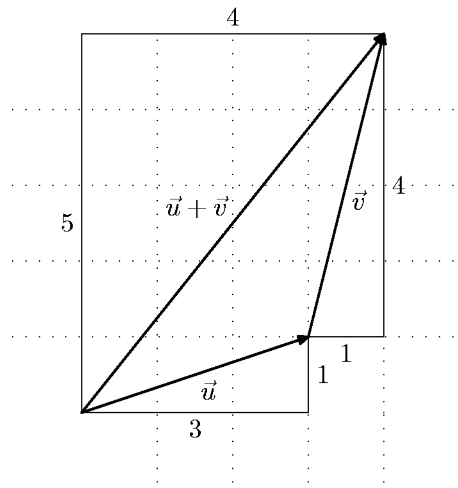
[1)] Diese Art der Bezeichnung ist nicht unproblematisch, denn während im allgemeinen ein Zusatz in der Bezeichnung aus einem Objekt ein wohlbestimmtes neues ableitet (f' die Ableitung von f, a^{-1} das Inverse von a, $-a$ die Gegenzahl von a), ist dies hier nicht der Fall: $\vec{F}$ ist *nicht* durch F eindeutig bestimmt, sondern umgekehrt: F ist als Betrag von $\vec{F}$ durch $\vec{F}$ festgelegt.

schwindigkeit und Beschleunigung.[2]



Algebraische Beschreibung der Vektoraddition:
Neben dieser geometrischen Beschreibung ist noch eine algebraische Beschreibung nützlich. Sie setzt ein Koordinatensystem voraus. Dann kann man nicht nur Punkte sondern auch Vektoren durch Koordinaten beschreiben. Ist etwa der Vektor $\vec{u}$ durch einen Pfeil mit Anfangspunkt $A = (x_A, y_A)$ und Endpunkt $B = (x_B, y_B)$ dargestellt, so sind Richtung, Orientierung und Länge des Pfeils, also der Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, eindeutig bestimmt durch die *Koordinaten* $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.





Die Addition von Vektoren, die durch Koordinaten gegeben sind, ist besonders einfach. Die Koordinaten des Summenvektors ergeben sich durch Addition der entsprechenden Koordinaten der Einzelvektoren:

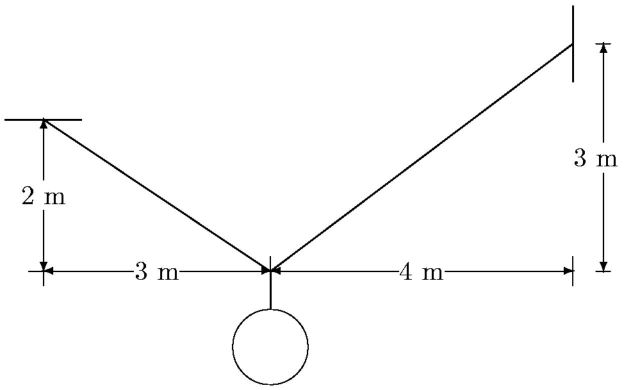
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Die nebenstehende Skizze veranschaulicht dies für die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Summenvektor $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

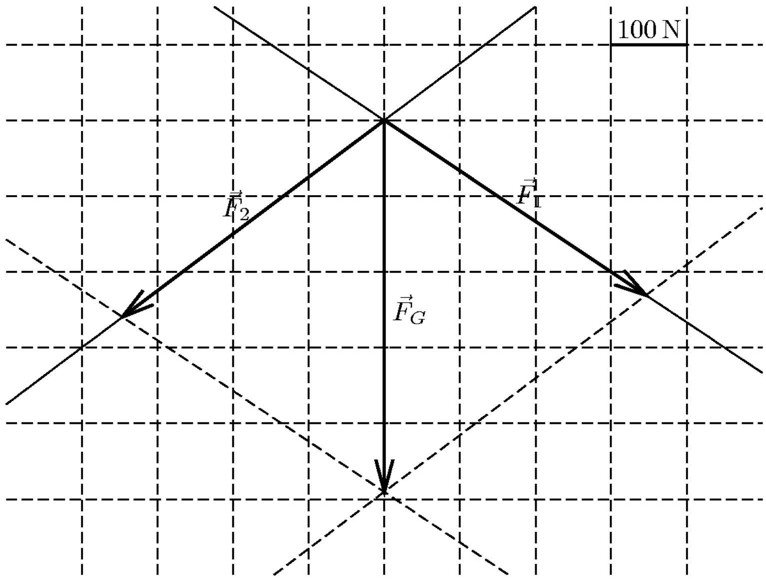
Wir wollen an dem folgenden einfachen Beispiel die verschiedenen Methoden zur vektoriellen Bestimmung von Kräften demonstrieren. Eine Straßenlampe der Masse $m = 50\,\mathrm{kg}$ hängt an zwei

2) Darauf aufbauend ist dann wegen der Newton'schen Grundgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ klar, dass auch Kräfte sich gemäß den Gesetzen der Vektoraddition überlagern.

Seilen wie skizziert. Man bestimme die Kräfte in den Seilen.



1. Zeichnerische Lösung: Man zerlegt die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in zwei Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die die Richtung der Seile haben. Dazu legt man zunächst einen Kraftmaßstab fest (hier werden 100 N durch 1 cm repräsentiert). Man stellt den Vektor der Gewichtskraft $\vec{F}_\text{G}$ durch einen Pfeil dar und zeichnet Geraden durch den Anfangspunkt in Richtung der Seile (die sog. *Wirkungslinien).* Sodann zeichnet man Parallelen zu den Wirkungslinien durch die Spitze des Gewichtsvektors. Ausgehend von $F_\text{G} = mg = 50\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 490{,}5\,\text{N}$ erhält man die nachfolgende Skizze.



Durch Ausmessen bestimmt man die Beträge F_1, F_2 der so ermittelten Kraftvektoren und damit die Belastungen der Seile:

$$F_1 = 420\,\text{N} \quad \text{und} \quad F_2 = 440\,\text{N}$$

2. Vektorrechnung: Die gesuchten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ sollen die Richtung des jeweiligen Seils haben. Die Seilrichtungen werden durch Richtungsvektoren angegeben, die man aus den Längenangaben entnimmt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man den Ansatz $\vec{F}_k = r_k \cdot \vec{v}_k$ $(k = 1, 2)$.

Da beide Vektoren den Vektor der Gesamtkraft $\vec{F}_\text{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_\text{G} \end{pmatrix}$ ergeben sollen, muss man folgende Vektorgleichung lösen:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_\text{G} \iff r_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_\text{G} \end{pmatrix}.$$

Mit $F_\mathrm{G} = 490{,}5\,\mathrm{N}$ ergibt dies das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 = -3r_1 + 4r_2 \\ -490{,}5\,\mathrm{N} = 2r_1 + 3r_2 \end{bmatrix}$$

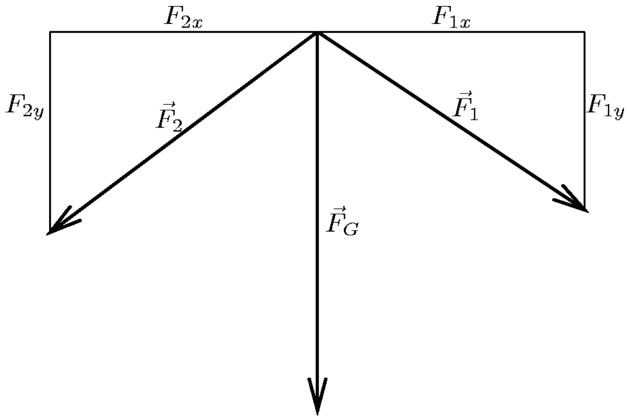
Dieses löst man mit den üblichen Methoden und erhält

$$r_1 = \frac{4}{3}r_2 \;\wedge\; -490{,}5\,\mathrm{N} = \frac{17}{3}r_2 \iff r_2 = -86{,}56\,\mathrm{N} \;\wedge\; r_1 = -115{,}41\,\mathrm{N}\,.$$

Dies ergibt

$$F_1 = |\vec{F}_1| = |r_1| \cdot |\vec{v}_1| = 416{,}12\,\mathrm{N}\,,$$
$$F_2 = |\vec{F}_2| = |r_2| \cdot |\vec{v}_2| = 432{,}79\,\mathrm{N}\,.$$

3. Komponentenzerlegung: Man zerlegt zunächst alle beteiligten Kräfte in Horizontal- und Vertikalkomponenten, die jeweils mit dem Index x für Horizontal und y für Vertikal bezeichnet werden:



Aufgrund der bekannten Richtung der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gilt:

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{2}{3} \iff F_{1y} = \frac{2}{3} \cdot F_{1x}\,, \quad \text{und genauso } F_{2y} = \frac{3}{4} \cdot F_{2x}\,.$$

Da die Gewichtskraft der Lampe keine Horizontalkomponente hat, müssen die Horizontalkomponenten der Teilkräfte übereinstimmen und die Vertikalkomponenten zusammen die Gewichtskraft F_G ergeben:

$$F_{1x} = F_{2x} \quad \text{und} \quad F_{1y} + F_{2y} = F_\mathrm{G} = 490{,}5\,\mathrm{N}\,.$$

Wir erhalten also die folgende Gleichung für F_{1x}:

$$490{,}5\,\mathrm{N} = \frac{2}{3}F_{1x} + \frac{3}{4}F_{2x} = (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) \cdot F_{1x}$$

und als Ergebnis:

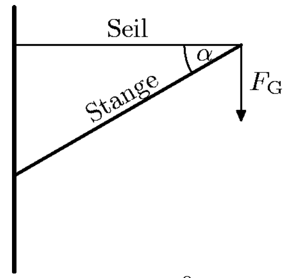
$$F_{2x} = F_{1x} = \frac{12}{17} \cdot F_\mathrm{G} = 346{,}24\,\mathrm{N}\,.$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ergibt dies

$$F_1 = \sqrt{1 + (\frac{2}{3})^2} \cdot F_{1x} = 416{,}12\,\mathrm{N}\,, \quad F_2 = \sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2} \cdot F_{2x} = 432{,}79\,\mathrm{N}\,.$$

c. Trigonometrische Funktionen. Wenn die physikalische Situation nicht nur durch Längenangaben, sondern durch Winkel beschrieben wird, benötigt man zusätzlich zu obigen Überlegungen die *trigonometrischen* Funktionen sin, cos, tan, etwa bei der Bestimmung der

Komponenten (vgl. S. 15). Als Beispiel betrachten wir die folgende Situation:



An einer Hauswand ist eine Lampe an der Spitze eines *Auslegers* befestigt. Der Ausleger besteht aus einer am Haus befestigten und von einem Seil gehaltenen Stange. Das Seil verlaufe genau horizontal und der Winkel zwischen Stange und Seil sei $\alpha = 30^0$. Wir wollen die Belastung von Seil und Stange bei einem Gewicht $F_\mathrm{G} = 500\,\mathrm{N}$ der Lampe ermitteln.

Sei $\vec{F_1}$ die Belastung des Seils und $\vec{F_2}$ die Belastung der Stange. Dann gilt für die Komponenten von $\vec{F_2}$:

$$\frac{F_{2,y}}{F_2} = \sin 30^0 \iff F_{2,y} = F_2 \cdot \sin 30^0\,, \quad \frac{F_{2,x}}{F_2} = \cos 30^0 \iff F_{2,x} = F_2 \cdot \cos 30^0\,.$$

Da das Seil horizontal verläuft, hat $\vec{F_1}$ keine Vertikalkomponente und aus $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F_\mathrm{G}}$ folgt zunächst

$$F_{2,y} = F_\mathrm{G} = 500\,\mathrm{N} \iff F_2 = \frac{F_{2,y}}{\sin 30^0} = \frac{500\,\mathrm{N}}{\frac{1}{2}} = 1000\,\mathrm{N}\,.$$

Für die Horizontalkomponente $F_{2,x}$ von $\vec{F_2}$ bedeutet dies:

$$F_{2,x} = F_2 \cdot \cos 30^0 = 1000\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^0 = 866{,}03\,\mathrm{N}\,.$$

Da $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{F_\mathrm{G}}$ keine Horizontalkomponente besitzt, stimmen $F_{1,x}$ und $F_{2,x}$ betraglich überein und es folgt

$$F_1 = |F_{1,x}| = F_{2,x} = 866{,}03\,\mathrm{N}\,.$$

11. Gleichförmige Kreisbewegungen

Die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn heißt *gleichförmig,* wenn in gleichen Zeitabschnitten gleichlange Streckenabschnitte zurückgelegt werden. Dies bedeutet, dass die sog. *Bahngeschwindigkeit* v konstant ist. Die Bahngeschwindigkeit v ist der Betrag des Geschwindigkeitvektors $\vec{v}$, $v = |\vec{v}|$. Dennoch liegt keine gleichförmige, unbeschleunigte Bewegung vor, denn die Bahn ist nicht geradlinig.

a. Definitionen. Zur Beschreibung einer gleichförmigen Kreisbewegung benutzt man eine Reihe physikalischer Größen, die allerdings sehr eng miteinander verknüpft sind:

Symbol	Name	Definition	Formel
r	Bahnradius	Abstand des umlaufenden Körpers vom Drehzentrum	
v	Bahngeschwindigkeit	Betrag der Geschwindigkeit	
T	Umlaufzeit	Zeit für einen Umlauf	
f	Frequenz	Quotient der Zahl der Umläufe durch die dafür benötigte Zeit	$f = \frac{\Delta N}{\Delta t}$
φ	Bogenmaß des Winkels	Verhältnis von Kreisbogenlänge l_r zum Radius r	$\varphi = \frac{l_r}{r}$
ω	Winkelgeschwindigkeit	Verhältnis des 'überstrichenen' Winkels zur dafür benötigten Zeit	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Man beachte, dass das Bogenmaß eines Winkels als Quotient zweier Längen dimensionslos ist. Frequenz und Winkelgeschwindigkeit werden in der gleichen Einheit *Hertz* $1\,\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$ angegeben.

Zwischen diesen Größen bestehen die folgenden wichtigen Beziehungen:

Beziehung	Begründung
$f = \dfrac{1}{T}$	1 Umlauf benötigt die Zeit T.
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	In der Zeit T wird einmal der Vollwinkel 2π durchlaufen.
$\omega = 2\pi f$	Kombination der beiden vorangehenden Beziehungen.
$v = \dfrac{2\pi r}{T}$	In der Zeit T wird einmal der Kreisumfang $2\pi r$ durchlaufen.
$v = r\omega$	Kombination aus vorangehenden Beziehungen.

Wegen der Beziehung $\omega = 2\pi f$ ist die Winkelgeschwindigkeit einfach das 2π-fache der Frequenz und wird daher auch *Kreisfrequenz* genannt.

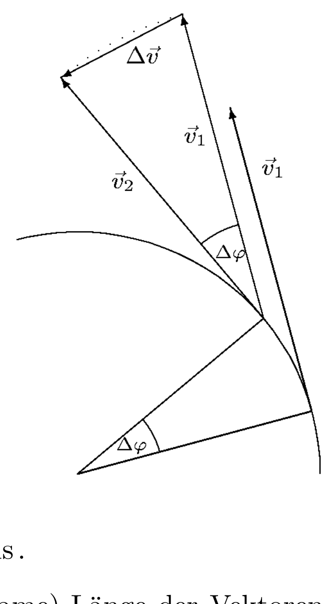
b. Die Zentripetalbeschleunigung. Obwohl bei einer gleichförmigen Kreisbewegung die Bahngeschwindigkeit unverändert bleibt, ist diese Bewegung dennoch *beschleunigt,* da sich die Richtung der Geschwindigkeit ständig ändert. Wir wollen nun den Beschleunigungsvektor bestimmen. Die nachfolgenden Überlegungen können auch benutzt werden, um die Richtung von $\vec{a}$ zu ermitteln. Wir wollen hier etwas simpler argumentieren. Wenn man einen Körper an einem Faden im Kreis herumschleudert, bleibt der Faden immer gespannt und die Kraftwirkung hat immer die Richtung des Fadens. Damit ist auch die Beschleunigung $\vec{a}$ immer zum Zentrum der Kreisbewegung gerichtet. Diese wird *Zentripetal-* oder auch *Radialbeschleunigung* genannt und mit $\vec{a}_z$ bezeichnet.

Die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_z$ ist immer zum Zentrum gerichtet.

Nachdem die Richtung von $\vec{a}_z$ geklärt ist, wollen wir nun den Betrag der Beschleunigung bestimmen: $a_z = |\vec{a}_z|$. Definitionsgemäß gilt

$$\vec{a}_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \, .$$

Wir betrachten zunächst die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2. Der Zeitunterschied ist dann $\Delta t = t_2 - t_1$ und der 'überstrichene' Winkel $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$. Die Geschwindigkeitsvektoren sind jeweils tangential zum Kreis, also im rechten Winkel zum Radiusvektor gerichtet. Daher ist der Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ genauso groß wie der Winkel zwischen den beiden Radien, also (wie in der Skizze schon eingetragen) gerade $\Delta\varphi$. [Zur Erinnerung: Vektoren sind durch Richtung und Länge festgelegt, sie haben keine bestimmte Lage im Raum; sie ändern sich nicht, wenn man die darstellenden Pfeile parallel verschiebt. Deshalb stellen die beiden mit $\vec{v}_1$ bezeichneten Pfeile denselben Vektor dar.]



Die Änderung $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ der Geschwindigkeiten kann man nun als Verbindung der Spitzen beider Vektoren darstellen, denn $\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2$. (Zur Erinnerung: Vektoren werden addiert, indem man sie 'aneinandersetzt' und den Verbindungsvektor vom Anfang des ersten zur Spitze des letzten bildet.) Den Betrag $|\Delta\vec{v}|$ dieser Geschwindigkeitsänderung kann man durch Vergleich mit der Länge des gepunktet skizzierten Bogens ermitteln. Es gilt:

$$\text{Bogenlänge} = \text{Radius} \times \text{Bogenmaß des Winkels}\, .$$

Der Radius des gepunktet gezeichneten Kreisbogens ist die (gemeinsame) Länge der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Also erhält man:

$$|\Delta\vec{v}| \approx v \cdot \Delta\varphi$$

und daher

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx v \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega \,.$$

Die rechte Seite ist nach Voraussetzung konstant, während die linke Seite sich für $\Delta t \to 0$ immer mehr dem rechten Wert annähert, so dass sich im Grenzübergang für $\Delta t \to 0$ die Gleichheit

$$a_{\mathrm{z}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = v \cdot \omega$$

ergibt. Zusammen mit $v = r\omega$ erhält man

$$\boxed{a_z = v \cdot \omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}}$$

c. Das Newtonsche Gravitationsgesetz. Die Astronomen des Altertums und des Mittelalters haben intensiv die Bahnen der Himmelskörper beobachtet und versucht, die dahinter stehenden Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Basierend auf dem umfangreichen Datenmaterial des dänischen Astronomen *Tycho Brahe* (1546-1601) hat *Johannes Kepler* (1571-1630) seine drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung aufstellen können. Darauf aufbauend entwickelte schließlich *Isaac Newton* (1642-1727) sein Gravitationsgesetz, aus dem sich umgekehrt die Keplerschen Gesetze herleiten lassen.

Ausgangspunkt war die Tatsache, dass nach der (auch von Newton stammenden) Grundgleichung der Mechanik die Zentripetalbeschleunigung der Planeten eine Kraft als Ursache haben muss. Newtons Ansatz war die Überzeugung, dass die Kraft, die Monde bzw. Planeten auf ihren Bahnen hält, dieselbe ist, die 'einen Apfel vom Baum fallen' lässt, die Gravitationskraft. Um nun die Gesetzäßigkeiten dieser Anziehungskraft zwischen Massen zu erforschen, untersucht man die Radialbeschleunigung, etwa für die 9 Planeten.

Wir gehen dabei (vereinfachend) davon aus, dass die Planeten sich gleichförmig auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen. Dies ist für die meisten Planeten näherungsweise richtig. Wir bestimmen die Radialbeschleunigung a_z der Planeten aus deren Umlaufzeit T um die Sonne und dem Bahnradius (=Sonnenabstand):

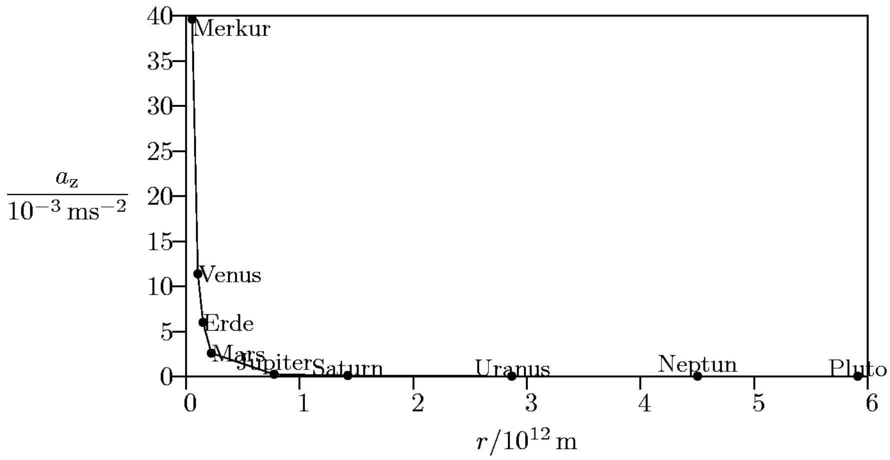
$$a_z = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \,.$$

Die folgende Tabelle enthält die Werte für die 9 Planeten:

Planet	$r/10^6\,\mathrm{km}$	$T/\,\mathrm{d}$	$a_z/10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Merkur	57,910	87,97	39,5746
Venus	108,200	224,70	11,3332
Erde	149,600	365,26	5,9304
Mars	227,940	686,98	2,5543
Jupiter	778,330	4332,71	0,2193
Saturn	1429,400	10759,50	0,0653
Uranus	2870,990	30685,00	0,0161
Neptun	4504,300	60190,00	0,0066
Pluto	5913,520	90800,00	0,0038

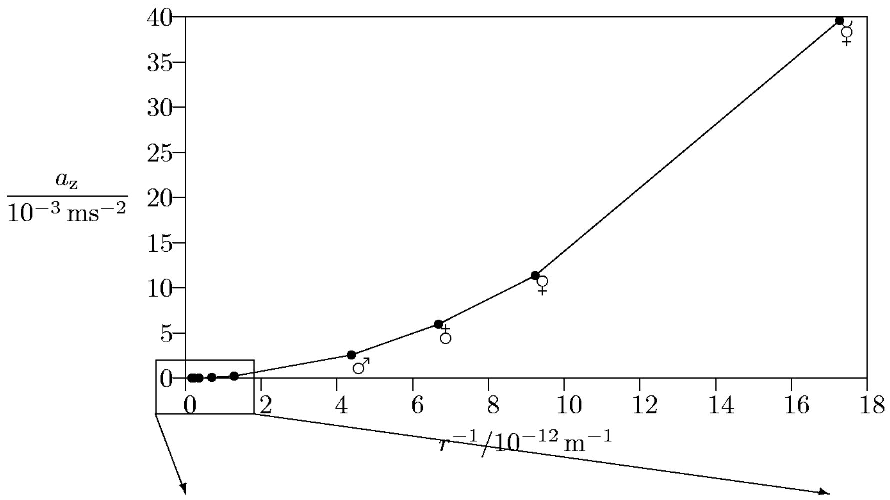
Die Daten zeigen, dass die Umlaufzeit T mit dem Bahnradius r wächst, die Radialbeschleunigung aber abnimmt. Stellt man die Radialbeschleunigung a_z in Abhängigkeit von r graphisch dar, erhält man folgendes Bild:

a_z in Abhängigkeit von r

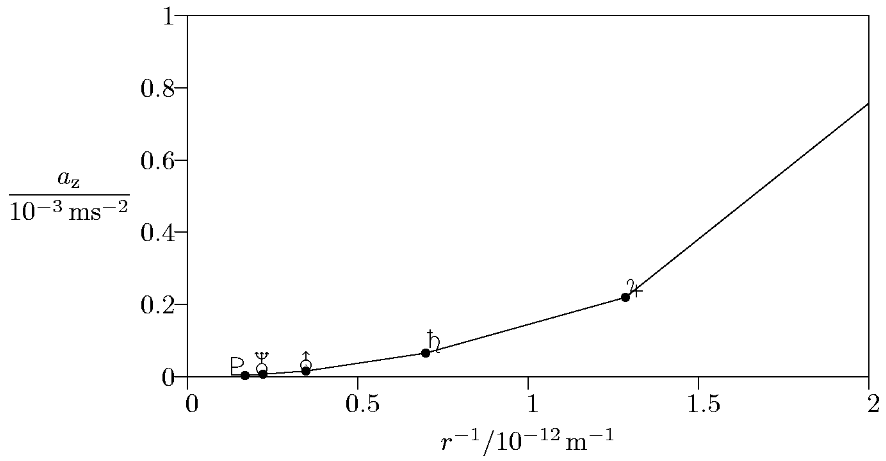


Da a_z mit r abnimmt, stellt man nun a_z in Abhängigkeit von $1/r$ dar, um zu überprüfen, ob evtl. eine umgekehrte Proportionaliät vorliegt. Man erhält dann das folgende Bild, in dem die sonnennahen Planeten rechts außen (großer Kehrwert $1/r$) und die sonnenfernen Planeten nahe 0 (kleiner Kehrwert $1/r$) zu finden sind. Der sonnenferne Bereich wird in der zweiten Skizze vergrößert dargestellt.

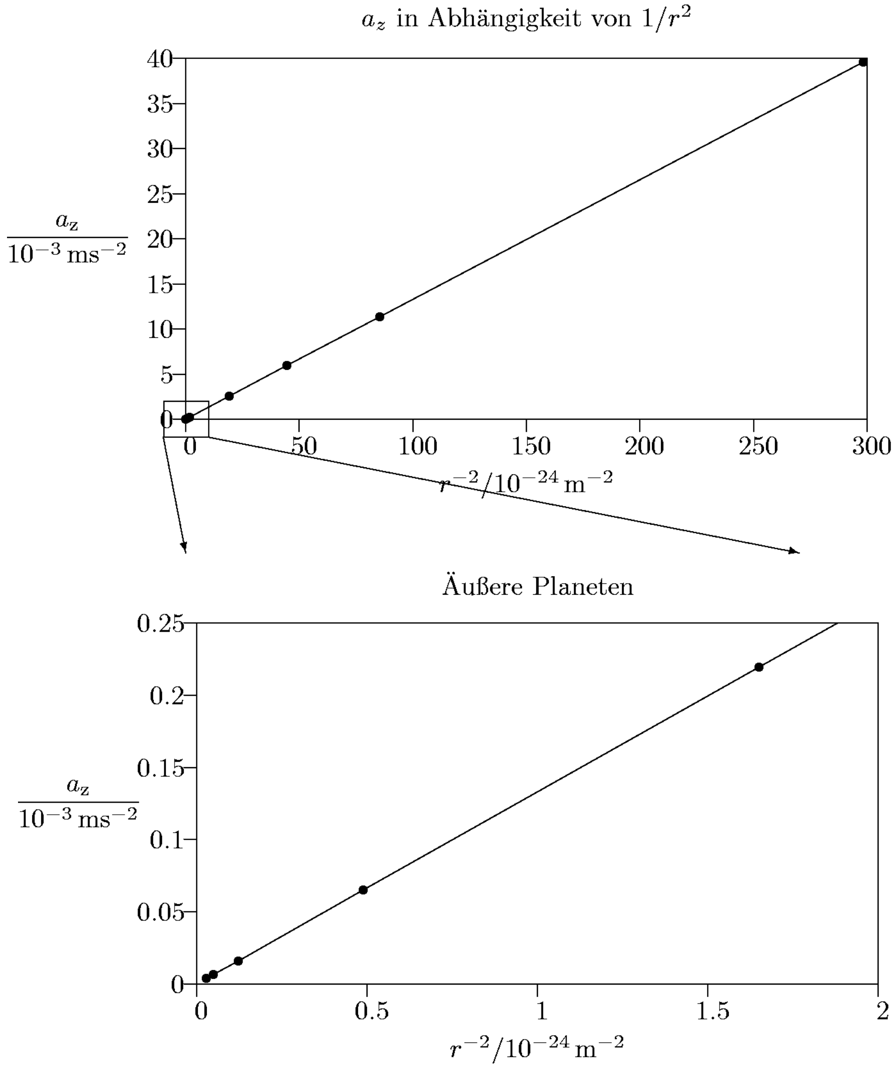
a_z in Abhängigkeit von $1/r$



Äußere Planeten



Man erkennt, dass keine Geraden, sondern parabelartige Graphen entstehen. Man untersucht daher im nächsten Schritt a_z in Abhängigkeit von $(\frac{1}{r})^2$. Dies ergibt die folgenden Graphen:



Offenbar liegen die Werte auf einer Ursprungsgeraden und man erhält:

Die Radialbeschleunigung a_z der Planeten ist proportional zu $\frac{1}{r^2}$.

Rechnerisch überprüft man dies, indem man zeigt:

$$\frac{a_z}{\frac{1}{r^2}} = a_z \cdot r^2 \text{ ist konstant.}$$

Dieselbe Gesetzmäßigkeit kann man bei Monden, die um einen Planeten kreisen, feststellen, nur dass der konstante Wert dann ein anderer ist. Es gilt also:

Die Radialbeschleunigung von Himmelskörpern, die um ein gemeinsames Zentrum kreisen, ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Zentrum.

Dies ist der entscheidende Schritt zum Gravitationsgesetz. Wir betrachten nun die (Gravitations-)Kraft F_g, die die Sonne auf den jeweiligen Planeten ausübt. Nach Newtons Ansatz ist sie die Ursache der Radialbeschleunigung, also selbst die Radialkraft:

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{z} = m_P \cdot a_z \sim \frac{m_P}{r^2} \quad (m_P \text{ Masse des Planeten}).$$

Die Gravitationskraft ist also proportional zur Masse des von der Sonne angezogenen Planeten und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes.

Nun gilt nach dem (ebenfalls von Newton stammenden) Grundprinzip *actio = reactio*: Der Planet übt auf die Sonne die gleiche Kraft wie die Sonne auf den Planeten aus. Die beiden Massen üben aufeinander die gleiche Kraft aus. Aufgrund dieser Symmetrie muss F_g auch proportional zur Sonnenmasse sein. Man erhält so das Newtonsche Gravitationsgesetz:

Je zwei Massen ziehen sich gegenseitig an; die Kraft ist proportional zu beiden beteiligten Massen m_1, m_2 und zum Kehrwert des Quadrates des Abstandes r:

$$F_g \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}\,.$$

Warnung: Auch wenn wir das Gravitationsgesetz durch Untersuchung von Kreisbewegungen begründet haben, ist es ein allgemeines Gesetz über die Anziehung zweier beliebiger Massen, unabhängig von irgendwelcher Bewegung. Und die Größe r ist nicht der Radius irgendeiner Kreisbahn, sondern allgemein der Abstand zwischen beiden Massen (weshalb man besser d statt r schreiben sollte).

d. Die Masse von Himmelskörpern. Dieses Gravitationsgesetz wird vervollständigt durch die Bestimmung der Proportionalitätskonstante im Labor durch *Henry Cavendish* (1731-1810):

$$F_g = G^* \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ mit der } \textit{Gravitationskonstanten } G^* = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}.$$

Cavendish veröffentlichte den Wert G^* in einer Arbeit mit dem Titel 'Über die Dichte der Erde'. In der Tat ermöglichte die Bestimmung von G^* unter Laborbedingungen die Ermittlung der Masse der Erde (und damit ihrer Dichte).

Dazu benutzt man die Tatsache, dass die Erde vom Mond umkreist wird. Aus den Bahndaten des Mondes (r Abstand zwischen Erd- und Mondmittelpunkt, T Umlaufzeit des Mondes) kann man die Zentripetalbeschleunigung $a_z = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ ermitteln. Diese wird von der Gravitationswirkung der Erde verursacht, stimmt also mit der Gravitationsbeschleunigung, die der Mond durch die Erde erfährt, überein:

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = a_z = a_g = \frac{F_g}{m_\mathrm{M}} = G^* \frac{m_\mathrm{E}}{r^2} \iff \frac{4\pi^2 r^3}{G^* T^2} = m_\mathrm{E}\,.$$

Auf diese Weise kann man bei Kenntnis von G^* die Masse der Erde bestimmen. Generell gilt

Hat ein Himmelskörper einen ihn umkreisenden Satelliten, so kann man die Masse des Zentralkörpers aus den Bahndaten des Satelliten ermitteln.

III. Schwingungen und Wellen

12. Schwingungen

a. Bewegungsgesetze - ein Rückblick. Bisher haben wir im Rahmen der Kinematik die folgenden Bewegungsarten studiert:

1. Die gleichförmige geradlinige Bewegung
2. Die gleichmäßig beschleunigte geradlinige Bewegung
3. Die Wurfbewegungen
4. Die gleichförmige Kreisbewegung

Diese Bewegungen werden beschrieben durch die sog. Bewegungsgesetze, die die physikalischen Größen s (Ort), v (Geschwindigkeit) und a (Beschleunigung) in Abhängigkeit von der Zeit t angeben. Die folgende Tabelle stellt die Ergebnisse zusammen:

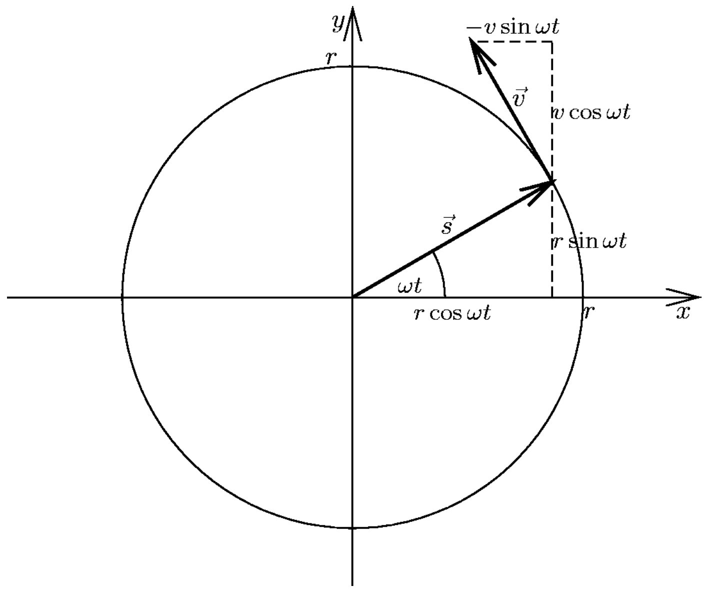
Art	Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung
1.	$s = s_0 + v_0 t$	$v = v_0$ konstant	$a = 0$
2.	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$	$v = v_0 + a_0 t$	$a = a_0$ konstant
3.	$x = x_0 + v_{0x} t$ $y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_0 t^2$	$v_x = v_{0x}$ konstant $v_y = v_{0y} + a_0 t$	$a_x = 0$ $a_y = a_0$ konstant
4.	$x = r \cos \omega t$ $y = r \sin \omega t$	$v_x = -v \sin \omega t$ $v_y = v \cos \omega t$	$a_x = -a_z \cos \omega t$ $a_y = -a_z \sin \omega t$

In den Fällen 3. und 4. sind die Bewegungen nicht geradlinig, so dass die genannten physikalischen Größen durch Vektoren

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$

gegeben sind. Man beachte, dass die Gesetzmäßigkeiten des Wurfes sich unmittelbar aus den zuvor genannten Bewegungsgesetzen von 1. und 2. ergeben, da ein Wurf eine Überlagerung einer gleichförmigen mit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist. Das Koordinatensystem ist dabei so gewählt, dass die y-Richtung die Richtung der (konstanten) Beschleunigung ist und in der dazu senkrechten x-Richtung die Beschleunigung 0 ist.

Die Bewegungsgesetze zu 1.–3. haben wir früher bereits hergeleitet, die Gesetze zu 4. ergeben sich aus einfachen geometrischen Überlegungen am Kreis und der Tatsache, dass der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ stets senkrecht zum Radiusvektor $\vec{s}$ ist. Wir gehen dabei davon aus, dass sich der Körper mit positivem Drehsinn (d. h. gegen den Uhrzeiger) bewegt und zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $(r, 0)$ befindet.



Für den Winkel φ zwischen Ortsvektor $\vec{s}$ und positiver x-Achse gilt daher $\varphi = \omega t$ (ω die Winkelgeschwindigkeit) und man erhält aus der vorangehenden Skizze die unter 4. angegebenen Bewegungsgesetze für $\vec{s}$ und $\vec{v}$. Da die Radialbeschleunigung $\vec{a}$ stets zum Zentrum gerichtet ist und den konstanten Betrag $|\vec{a}| = a_z = r\omega^2$ hat, ergibt sich auch $\vec{a}$ wie in der Tabelle angegeben. Man beachte insbesondere die fundamentale Folgerung:

> Für die Radialbeschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung gilt stets:
>
> $$\vec{a} = -\omega^2 \vec{s}\,.$$

b. Harmonische Schwingungen. Wir wollen nun eine scheinbar völlig neue Bewegungsart betrachten, sog. *Schwingungen.* Schwingungen beobachtet man an vielen Stellen in unserer Umwelt: ein Kind auf einer Schaukel, eine an einer Feder hängende Masse oder das Pendel einer Standuhr schwingen. Aber auch die Atome in einem Kristall, die Luft vor einer Lautsprecherbox oder die Saiten einer Geige schwingen. Es gibt aber auch nicht mechanische Schwingungen.

Wir betrachten zunächst als einführendes mechanisches Beispiel eine an einer Feder hängende Masse. Solange keine Kraft auf sie einwirkt, bleibt sie in der Ruhelage. Wenn man nun die Masse aus der Ruhelage herauszieht und loslässt, so beginnt die Masse zu schwingen:

1. Die Federkraft zieht die Masse zur Ruhelage zurück,
2. dadurch wird sie beschleunigt,
3. sie erreicht die Ruhelage mit positiver Geschwindigkeit,
4. aufgrund der Trägheit bewegt sich die Masse über die Ruhelage hinaus auf die andere Seite,
5. dabei wird sie von der Federkraft gebremst, bis die Geschwindigkeit auf 0 abgesunken ist,
6. die weiter wirkende Federkraft beschleunigt die Masse nun wieder zur Ruhelage und die Bewegungsabschnitte 1.–5. wiederholen sich in umgekehrter Richtung.
7. Schließlich erreicht die Masse wieder die Ausgangsposition und der gesamte Bewegungsvorgang wiederholt sich.

Ursache einer Schwingung ist also eine immer zur Ruhelage gerichtete Kraft, man spricht von der *Rückstellkraft:* sie zieht den Körper stets zur Ruhelage *zurück.* Dem entgegen wirkt die Trägheit, die den Körper über die Ruhelage hinaus schwingen lässt.

An diesem Beispiel können wir zunächst die wesentlichen Eigenschaften, die eine Schwingung ausmachen, erkennen:

> Eine Schwingung ist eine periodische Hin-und-Her-Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten um einen ausgezeichneten Punkt, die sog. Ruhelage herum.

Dabei sind die Umkehrpunkte die Positionen, in denen die Geschwindigkeit 0 ist, während die Ruhelage dadurch gekennzeichnet ist, dass der Körper dort kräftefrei ist, er also dort in Ruhe bleibt, wenn keine Bewegungsenergie vorhanden ist.

Zur Beschreibung einer Schwingung benutzt man die *Elongation s*; dies ist die momentane Entfernung von der Ruhelage, gemessen längs der Bahn, wobei man die Elongation in einer Richtung positiv und in der anderen negativ wertet. Die maximale Elongation ist die sog. *Amplitude* $\hat{s}$ (lesen Sie: s-Dach). Sie ist der Betrag der Elongation in den Umkehrpunkten. Die maximale Geschwindigkeit $\hat{v}$ hat ein schwingender Körper beim Durchgang durch die Ruhelage. Schließlich ist noch die Schwingungsdauer T eine wichtige Größe zur Erfassung der Schwingung. Sie ist der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden identischen Schwingungszuständen (gleiche Position und gleicher Geschwindigkeitsvektor), etwa zwischen zwei Durchgängen durch denselben Umkehrpunkt oder zwei Durchgängen durch die Ruhelage bei gleicher Bewegungsrichtung. Statt der Schwingungsdauer T kann man auch die Frequenz $f = \frac{1}{T}$ der Schwingung verwenden; sie gibt die Zahl der Schwingungen pro Zeit an.

Ursache der „Hin-und-Her-Bewegung“ eines Federpendels ist die Rückstellkraft der Feder: Der schwingende Körper erfährt stets eine Kraft in Richtung zur Ruhelage. Nun gilt im Falle einer Feder für diese Kraft aufgrund des Hookeschen Gesetzes eine zusätzliche Eigenschaft: Die Rückstellkraft ist proportional zur Elongation. Schwingungen mit dieser Eigenschaft nennt man *harmonisch:* Eine mechanische Schwingung nennt man *harmonisch,* wenn die Rückstellkraft proportional ist zur Elongation: $\vec{F} = -D\vec{s}$.

Aufgrund der Newton'schen Grundgleichung der Mechanik $\vec{F} = m\vec{a}$ erhält man $m\vec{a} = -D\vec{s} \iff \vec{a} = -\frac{D}{m}\vec{s} = -k\vec{s}$ und damit die folgende umfassendere Definition harmonischer Schwingungen:

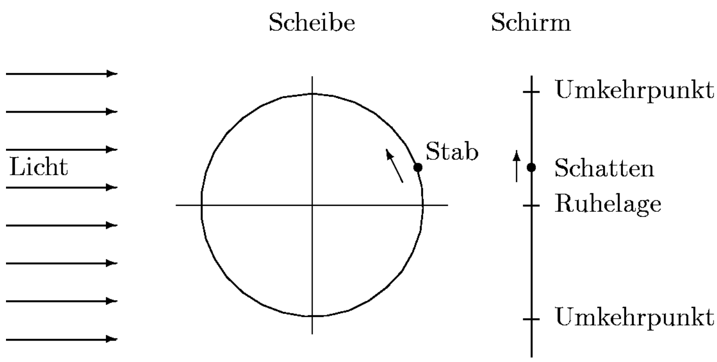
> Eine Schwingung nennt man *harmonisch,* wenn die Beschleunigung negativ proportional ist zur Elongation: $\vec{a} = -k\vec{s}$ mit $k > 0$.

Die Schwingung eines Federpendels ist unser erstes Beispiel einer harmonischen Schwingung:

> Die Schwingung eines Federpendels ist eine harmonische Schwingung. Der Betrag des Proportionalitätsfaktors zwischen Beschleunigung und Elongation ist $k = \frac{D}{m}$, wenn m die schwingende Masse und D die Härte der Feder ist.

c. Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung. Diese oben gegebene Definition einer harmonischen Schwingung zeigt deutlich die Verwandtschaft zur gleichförmigen Kreisbewegung: Auch diese ist eine periodische Bewegung mit einer Proportionalität zwischen Beschleunigung und Ortsvektor (siehe S. 38): $\vec{a} = -\omega^2\vec{s}$. Allerdings handelt es sich um eine Bewegung auf einer geschlossenen Bahn und dadurch fehlt die charakteristische 'Hin-und-Her-Bewegung' zwischen den Umkehrpunkten.

Nun kann man jedoch aus einer gleichförmigen Kreisbewegung eine typische Schwingung ableiten. Dazu betrachtet man eine sog. *Projektion* der Kreisbewegung. Physikalisch etwa realisierbar durch einen Schatten: Man markiert auf einer drehbaren Scheibe einen Punkt auf dem Rand durch einen Stab und beleuchtet die Scheibe von der Seite her parallel zu ihrer Oberfläche (siehe Skizze). Auf einem Schirm beobachtet man den Schatten des Stabes.



Dreht sich die Scheibe in positiver Richtung (d. h. gegen den Uhrzeigersinn), so bewegt sich der Schatten von der Ruhelage nach oben bis zum Umkehrpunkt, von dort wieder nach unten durch die Ruhelage bis zum unteren Umkehrpunkt und zurück zur Ruhelage. Dann wiederholt sich der Bewegungsablauf: Der Schatten durchläuft eine Schwingung um die gekennzeichnete Ruhelage herum. Dabei ist die Schwingungsdauer gleich der Umlaufzeit T der Kreisbewegung; die Amplitude ist gleich dem Radius r des Kreises und die Geschwindigkeit der Schattenbewegung beim Durchgang durch die Ruhelage ist gleich der Bahngeschwindigkeit v der Kreisbewegung (denn beim Durchgang durch die Ruhelage ist der Geschwindigkeitsvektor des Stabes parallel zum Schirm, so dass Stab und Schatten in diesem Moment dieselbe Geschwindigkeit haben).

Aus der fundamentalen Eigenschaft

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{s} = -\omega^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

einer gleichförmigen Kreisbewegung ergibt sich für die Projektion auf die y-Koordinate natürlich

$$a_y = -\omega^2 y\,.$$

Die Beschleuigung a_y der projizierten Kreisbewegung ist negativ proportional zur Elongation y und die projizierte Schwingung damit *harmonisch.* Wir halten fest:

> Die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung mit dem Radius r und der Umlaufzeit T ist eine harmonische Schwingung mit der Amplitude r, der Schwingungsdauer T und dem Proportionalitätsfaktor $-\omega^2$ zwischen Beschleunigung und Elongation.

Im Gegensatz zur harmonischen Schwingung eines Federpendels können wir bei der projizierten Kreisbewegung den zeitlichen Ablauf der Bewegung genau erkennen. Aus den bekannten Bewegungsgesetzen für die gleichförmige Kreisbewegung des Stabes (siehe Abschnitt a. 4.) erhalten wir die Bewegungsgleichungen für die Schattenbewegung. Wir beschreiben die Position des Stabes durch den Ortsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in Bezug auf das Kreiszentrum. Die Elongation des Schattens ist dann die y-Koordinate von $\vec{s}$. Da die Amplitude $\hat{y} = r$ und die maximale Geschwindigkeit $\hat{v} = v = r\omega$ ist, ergeben sich (mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$) die Bewegungsgesetze der projizierten Kreisbewegung:

$$\begin{aligned} y &= \hat{y}\sin\omega t = \hat{y}\sin 2\pi\frac{t}{T}\,, \\ v_y &= \hat{y}\omega\cos\omega t = \hat{y}\omega\cos 2\pi\frac{t}{T}\,, \\ a_y &= -\hat{y}\omega^2\sin\omega t = -\hat{y}\omega^2\sin 2\pi\frac{t}{T}\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen setzen voraus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schatten in positiver Richtung durch die Ruhelage läuft.

d. Die Bewegungsgesetze einer harmonischen Schwingung. Wir werden nun das Problem der Bewegungsgesetze einer harmonischen Schwingung auf die oben gefundenen Gesetze zurückführen, indem wir zeigen:

> Jede harmonische Schwingung kann als Projektion einer geeigneten gleichförmigen Kreisbewegung beschrieben werden.

Wir gehen aus von einer harmonischen Schwingung. Es sei s die Elongation, a die Momentanbeschleunigung und $k > 0$ der Betrag des Proportionalitätsfaktors zwischen a und s: $a = -ks$. Wir wollen nun eine Kreisbewegung konstruieren, deren Projektion genau denselben Gesetzmäßigkeiten folgt. Wir sorgen zunächst dafür, dass zu einem Zeitpunkt die projizierte Kreisbewegung und die vorgegebene harmonische Schwingung beide gemeinsam im (oberen) Umkehrpunkt sind. Wählt man nun den Radius r der Kreisbewegung gleich der Amplitude $\hat{s}$ der Schwingung, so haben beide Bewegungen zu diesem Zeitpunkt *dieselbe Elongation* $s = \hat{s} = r = \hat{y}$ und *dieselbe Geschwindigkeit* (nämlich $v = 0$).

Nun wählen wir die Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung so, dass $\omega^2 = k$ gilt. Dann gelten für beide Bewegungen auch dieselben Beschleunigungsgesetze $a = -ks = -\omega^2 s$ und $a_y = -\omega^2 y$. Haben beide Bewegungen also einmal die gleiche Position und die gleiche Geschwindigkeit, so müssen sich diese Größen bei gleicher Beschleunigung in gleicher Weise ändern, also immer identisch bleiben.[1)] Wir erhalten so für eine beliebige harmonische Schwingung genau die

[1)] Eine präzise Herleitung dieser Tatsache werden wir später im Abschnitt über Differentialgleichungen in der Physik kennenlernen (siehe Skript zu Elektrizität und Magnetismus, Abschnitt 11.g.)

Bewegungsgesetze der projizierten Kreisbewegung.

Bewegungsgesetze einer harmonischen Schwingung:

a) Zwischen der Proportionalitätskonstanten $k > 0$ in $a = -ks$ und der Schwingungsdauer besteht die fundamentale Beziehung

$$k = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \iff T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}\,.$$

b) Ist $\hat{s}$ die Amplitude der Schwingung, so ist $\hat{v} = \hat{s}\omega$ die maximale Geschwindigkeit.

c) Elongation und Momentangeschwindigkeit werden durch die trigonometrischen Funktionen beschrieben:

$$s = \hat{s}\sin\omega(t_0 + t) = \hat{s}\sin 2\pi\frac{t_0 + t}{T}\,,$$
$$v = \hat{v}\cos\omega(t_0 + t) = \hat{v}\cos 2\pi\frac{t_0 + t}{T}\,.$$

Dabei sind $s_0 = \hat{s}\sin\omega t_0$ und $v_0 = \hat{v}\cos\omega t_0$ die Anfangswerte der Schwingung zum Zeitpunkt $t = 0$.

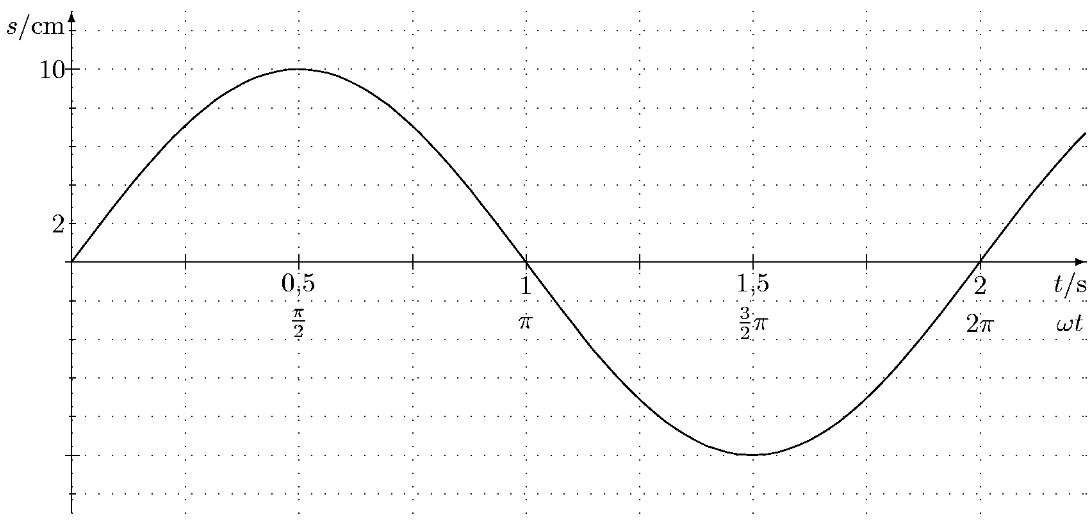
Beispiel (Übung (M18), Aufgabe 1): Ein Körper vollführt eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $\hat{s} = 10\,\text{cm}$ und der Periodendauer $T = 2\,\text{s}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde er sich in der Ruhelage mit positiver Geschwindigkeit. Mit den gegebenen Werten für T und $\hat{s}$ ergibt sich

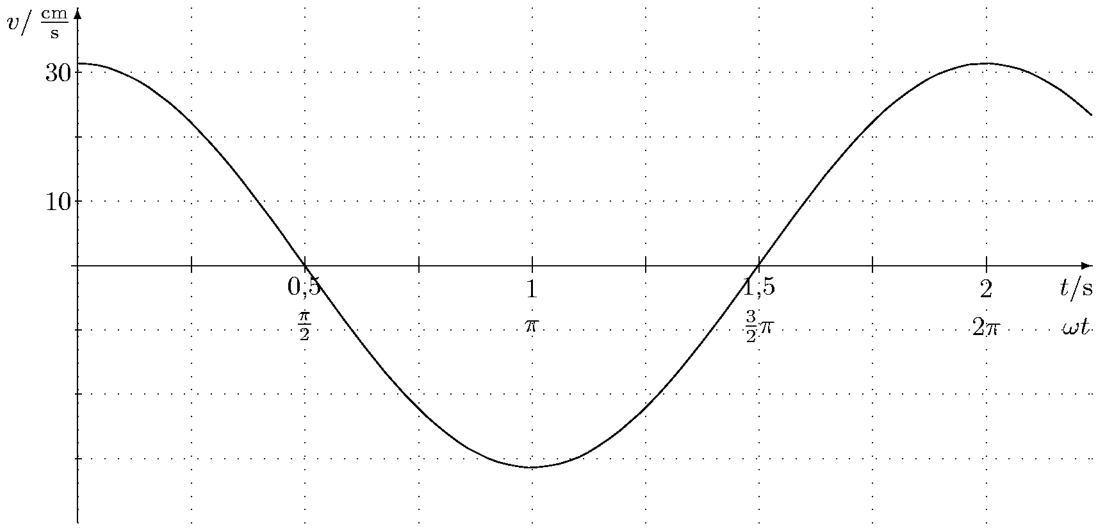
$$\omega = \frac{2\pi}{2\,\text{s}} = \pi\,\text{Hz} \approx 3{,}14\,\text{Hz}$$
$$\hat{v} = \hat{s}\cdot\omega = 31{,}42\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
$$\hat{a} = \hat{s}\cdot\omega^2 = 98{,}7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

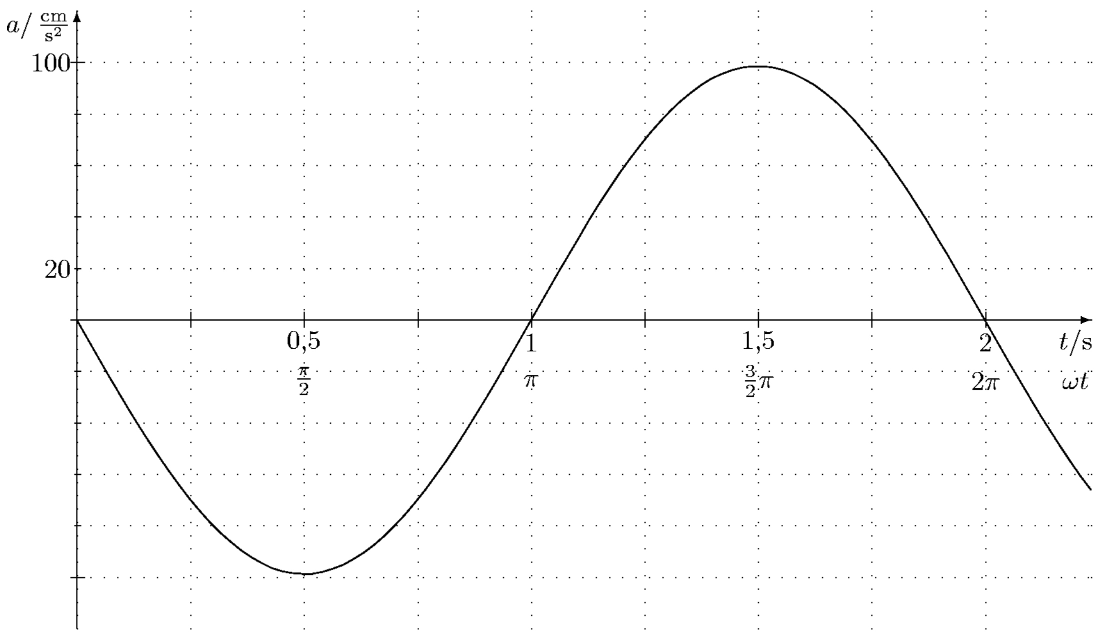
und damit dann (wegen $t_0 = 0$)

$$s = 10\,\text{cm}\cdot\sin\pi t\,, \quad v = 31{,}42\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\cos\pi t\,, \quad a = -98{,}7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\sin\pi t\,.$$

Dies ergibt die folgenden Graphen für die Elongation s, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a:

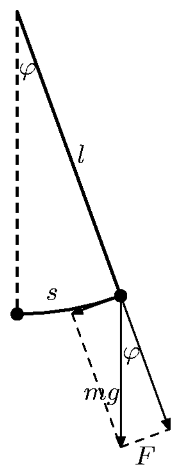






e. Das Fadenpendel. Wir wollen nun den Inbegriff einer Schwingung, das Fadenpendel, genauer untersuchen, insbesondere ob es sich um eine harmonische Schwingung handelt.

Die Elongation s ist die längs der Bahn gemessene Entfernung aus der Ruhelage, es gilt also $s = l \cdot \varphi$ mit dem Auslenkungswinkel φ (im Bogenmaß). Die Rückstellkraft F wird erzeugt von der Gewichtskraft $F_G = mg$. Diese wird zerlegt in eine Kraft in Richtung des Fadens und eine Komponente senkrecht dazu in Bahnrichtung. Dies ist die Rückstellkraft F. Damit gilt $\frac{F}{mg} = \sin\varphi$. Fazit:



Für ein Fadenpendel der Länge l und der Masse m gilt: $$s = l\varphi \quad \text{und} \quad F = mg\sin\varphi\,.$$

Dies ergibt für die Rückstellkraft F bzw. die Beschleunigung a folgende Abhängigkeit von der Elongation s:

$$F = mg\sin\frac{s}{l} \quad \text{bzw.} \quad a = g\sin\frac{s}{l}\,.$$

Es liegt also *keine* Proportionalität zwischen a und s vor: Das Fadenpendel stellt keine harmonische Schwingung dar.

Allerdings gilt bei genauerem Hinsehen doch das Folgende. Für kleine Winkel (etwa bis 5^0 bzw. im Bogenmaß bis etwa 0,1) gilt folgende Näherungsformel des Sinus

$$\sin x \approx x \quad \text{für } |x| < 0{,}1\,.$$

Die Abweichung ist dabei maximal $0{,}1 - \sin 0{,}1 \approx 1{,}67 \cdot 10^{-4}$. Wenn also die Elongation s klein ist gegen die Fadenlänge l (etwa $\frac{s}{l} < 0{,}1$), gilt näherungsweise

$$a = g \sin \frac{s}{l} \approx \frac{gs}{l}\,.$$

Dies ergibt das folgende Resultat:

Das Fadenpendel:
Die Schwingung eines Fadenpendels ist für kleine Elongationen (etwa $s < \frac{l}{10}$ bzw. Auslenkungswinkel $< 5^0$) harmonisch.
Für die Proportionalitätskonstante zwischen a und s gilt $k = \dfrac{g}{l}$.
Die Schwingungsdauer ist durch Fadenlänge und Fallbeschleunigung bestimmt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Weitere Beispiele für harmonische Schwingungen haben wir in den Übungen besprochen (Übung (M19), Aufgaben 4,5).

f. Energie. Bei einer Schwingung findet ein regelmäßiger Energieaustausch statt. In den Umkehrpunkten ist die Geschwindigkeit 0 und die Bewegungsenergie ebenfalls. Die gesamte Energie ist potentielle Energie (Spannungsenergie der Feder beim Federpendel bzw. Lagenergie beim Fadenpendel). Beim Durchgang durch die Ruhelage ist die potentielle Energie 0 und die gesamte Energie in Bewegungsenergie umgewandelt. Mit dem Prinzip der Energieerhaltung ergibt sich daraus die Übereinstimmung von maximaler kinetischer Energie und maximaler potentieller Energie. Die maximale kinetische Energie ist in beiden Fällen $W = \frac{1}{2}m\hat{v}^2$.

Beim *Federpendel* ist die potentielle Energie die Spannungsenergie, die maximale potentielle Energie ist also $W = \frac{1}{2}D\hat{s}^2$. Die Übereinstimmung beider Energien gemäß dem Prinzip der Energieerhaltung ergibt

$$\frac{1}{2}m\hat{v}^2 = \frac{1}{2}D\hat{s}^2 \iff \frac{\hat{v}}{\hat{s}} = \sqrt{\frac{D}{m}}\,.$$

Hiermit ist eine Bestimmung von $\hat{v}$ aus der Amplitude $\hat{s}$ ohne Rückgriff auf die Bewegungsgesetze der harmonischen Schwingung möglich.

Beim *Fadenpendel* ist die maximale Lagenergie $mg\hat{h}$ mit der Höhe $\hat{h}$ der Umkehrpunkte über der Ruhelage. Eine einfache geometrische Überlegung zeigt

$$l - \hat{h} = l\cos\alpha = l\cos\frac{\hat{s}}{l} \iff \hat{h} = l(1 - \cos\frac{\hat{s}}{l})\,.$$

Für die maximale Geschwindigkeit (beim Durchgang durch die Ruhelage) gilt daher

$$\frac{1}{2}m\hat{v}^2 = mg\hat{h} \iff \hat{v}^2 = 2g\hat{h} = 2gl(1 - \cos\frac{\hat{s}}{l})$$

Diese Beziehung gilt auch für größere Amplituden, für die die Pendelschwingung nicht mehr harmonisch ist.

13. Wellen

Bei dem Wort Wellen denkt wohl jeder zuerst an Meer, Strand und heranrollende Wasserwellen. Aber auch an die Wellen auf der glatten Oberfläche eines Teiches, die von einem Stein oder auch nur von Regentropfen erzeugt werden. Aber das Phänomen einer Welle ist nicht auf Wasser, ja nicht einmal nur auf mechanische Vorgänge beschränkt. So kennen Sie alle Schallwellen, ohne die wir nichts hören könnten, und auch Licht ist ein Wellenphänomen. Unsere heutige technisierte Welt mit Rundfunk, Fernsehen, Telekommunikation ist so vom Phänomen der Welle durchdrungen, dass ohne deren fundiertes Verständnis kein technischer Fortschritt möglich wäre. Ja sogar bis in den atomaren Bereich mit der Quantenmechanik und deren Beschreibung durch *Wellenfunktionen* reicht dieses universelle physikalische Phänomen.

Wir wollen nun im folgenden die Grundlagen dieses Phänomens und seine physikalische Erfassung erarbeiten. Dazu müssen wir klären, was Wellen sind und durch welche Größen sie erfasst und beschrieben werden können.

a. Schwingungsausbreitung. Verbindet man zwei Fadenpendel durch eine Feder und setzt ein Pendel in Bewegung, so überträgt die Feder Kräfte auf das zweite Pendel und setzt auch dieses in Bewegung. Während das erste Pendel abgebremst wird, wird die Bewegung des zweiten Pendels stärker und überträgt nun seinerseits Kräfte auf das erste Pendel. Die beiden Pendel sind *gekoppelt.* Die beiden Pendel beeinflussen sich gegenseitig und tauschen Energie aus.

> Gekoppelte Schwingungssysteme sind schwingungsfähige Systeme, die sich gegenseitig beeinflussen und Energie austauschen.

Wir betrachten nun eine *Vielzahl* gekoppelter schwingungsfähiger Systeme. Wenn nun ein solches System in Schwingung versetzt wird (angeregt wird), wird sich die Schwingung aufgrund der Kopplung auf die Nachbarsysteme übertragen und dadurch ausbreiten. Wir haben dies in der Simulation an der *Wellenmaschine* gesehen. Jeder Punkt stellt ein schwingungsfähiges System dar, das in der angegebenen Richtung schwingen kann. Am linken Rand wurde das erste System angeregt, die Schwingung breitet sich nach rechts aus. Man erhält im Abstand von 0,25 s die auf der folgenden Seite dargestellten Momentaufnahmen. Wir erkennen: Es entsteht eine *Welle.*

> Eine Welle ist eine sich ausbreitende Schwingung.

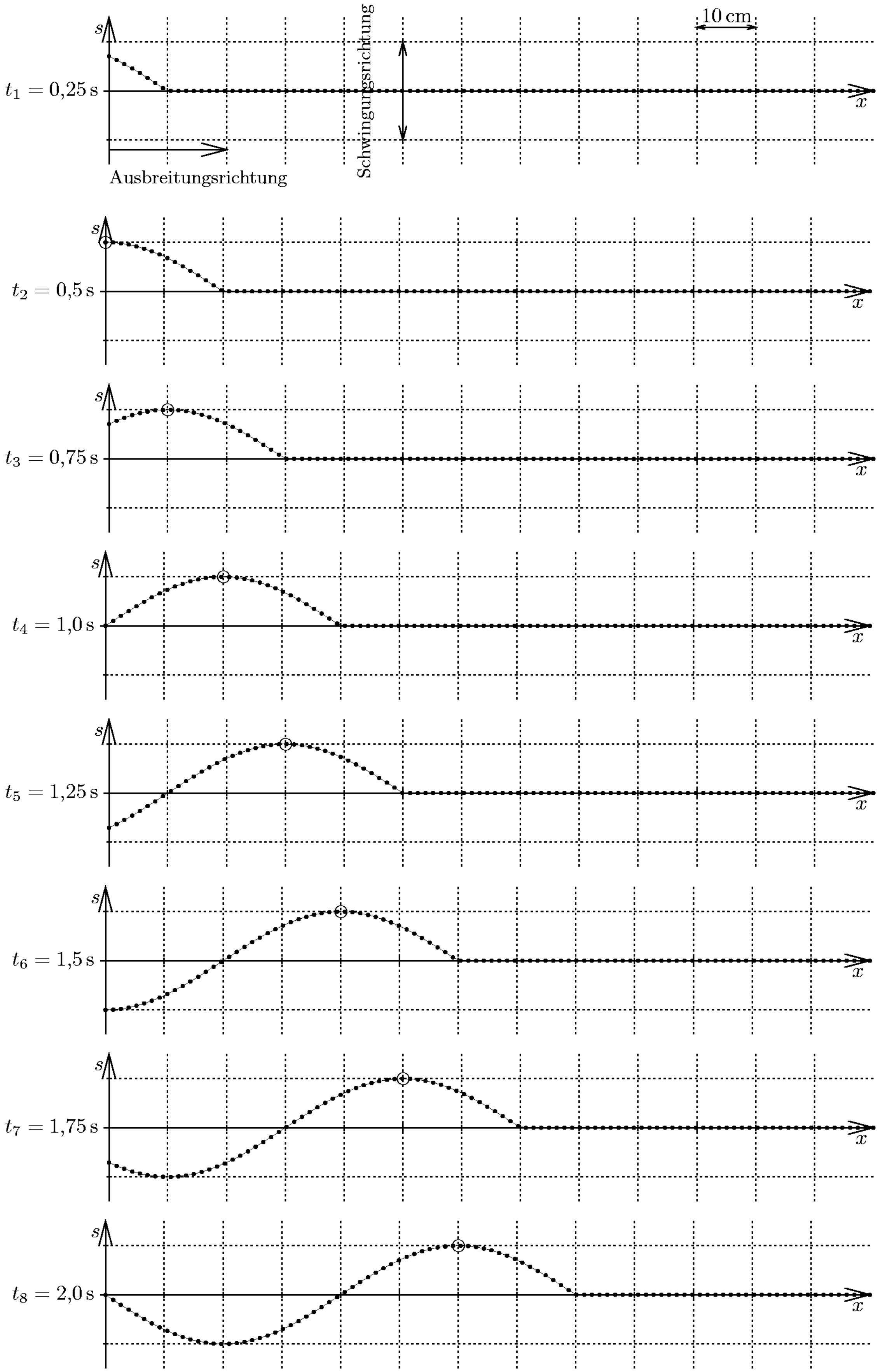
Um eine Welle zu beschreiben und schließlich quantitativ zu erfassen, betrachten wir zunächst die Schwingung der einzelnen schwingungsfähigen Systeme. Wir gehen davon aus, dass es sich um identische, harmonisch schwingende Systeme handelt. Die charakteristischen Größen dafür sind die Amplitude $\hat{s}$ und die Schwingungsdauer T. Aus den Momentaufnahmen der Wellenmaschine entnehmen wir als Schwingungsdauer $T = 2\,\mathrm{s}$, denn das erste schwingungsfähige System hat zum Zeitpunkt $t_8 = 2\,\mathrm{s}$ dieselbe Phase wie zum Startzeitpunkt $t_0 = 0$ (Ruhelage mit Bewegungsrichtung nach oben).

Die Tatsache der *Ausbreitung* der Schwingungen erkennt man an den sich nach rechts bewegenden Punkten gleichen Schwingungszustandes. In den Bildern der Wellenmaschine sind die Punkte im oberen Umkehrpunkt (Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$) durch kleine Kreise markiert. Man erkennt deutlich, wie sie im Laufe der Zeit nach rechts wandern. Man kann aus ihren Positionen und der verstrichenen Zeit die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* (auch *Phasengeschwindigkeit* genannt) der Welle ermitteln. Im zeitlichen Abstand $\Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s}$ wandern die eingekreisten oberen Umkehrpunkte um jeweils $\Delta x = 10\,\mathrm{cm}$ weiter. Wir erhalten die

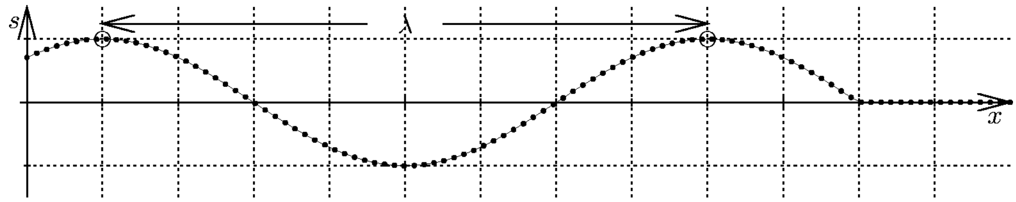
$$\boxed{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit} \qquad c = \frac{\Delta x}{\Delta t}.}$$

In unserem Beispiel $c = \frac{10\,\mathrm{cm}}{0{,}25\,\mathrm{s}} = 40\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Statt der oberen Umkehrpunkte hätte man auch jede andere Phase verfolgen können, etwa auch die Wellenfront (Ruhelage mit Bewegungsrichtung nach oben).

Momentaufnahmen einer sich ausbreitenden Schwingung



Bei der soeben beschriebenen Erfassung der Phasengeschwindigkeit c haben wir *zwei* Momentaufnahmen der Welle mit der Zeitdifferenz Δt betrachtet und die von einer bestimmten Phase zurückgelegte Strecke Δx ermittelt. Man kann jedoch die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe einer anderen wichtigen Wellengröße bestimmen, mit der *Wellenlänge* λ. Dazu betrachten wir nur *eine* Momentaufnahme und bestimmen den räumlichen Abstand zweier *benachbarter phasengleicher* Punkte (siehe nachfolgende Skizze), etwa zweier positiver Maximalausschläge (Phasenwinkel $\frac{\pi}{2}$).



Die Wellenlänge λ ist der Abstand zweier benachbarter phasengleicher Punkte der Welle.

Aus der Wellenlänge erhält man leicht die Ausbreitungsgeschwindigkeit c, wenn man die Zeit bestimmt, in der sich die Welle vom linken markierten Punkt zum rechten Punkt ausgebreitet hat. Dies ist aber genau die Schwingungsdauer T, denn während die Phase vom linken zum rechten Hochpunkt weiterwanderte, hat das linke System genau eine volle Schwingung durchlaufen und befindet sich wieder im oberen Umkehrpunkt. Wir erhalten so den wichtigen Zusammenhang zwischen *Ausbreitungsgeschwindigkeit* c, *Wellenlänge* λ und *Periode* T:

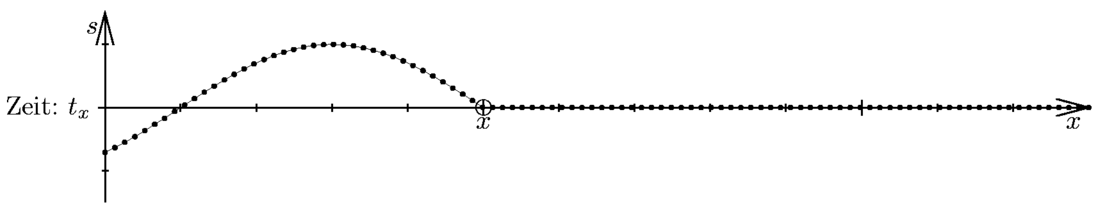
$$\boxed{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit} \quad c = \frac{\lambda}{T}.}$$

b. Die Wellengleichung. Wir wollen nun Wellen quantitativ erfassen. Dazu beschreiben wir die Elongation s in Abhängigkeit von der Zeit t *und* vom Ort x:

$s(x,t)$ bezeichnet die Elongation zum Zeitpunkt t an der Stelle x.

Diese Funktion wollen wir nun bestimmen. Wir setzen voraus, dass alle Schwingungssysteme harmonisch schwingen mit gleicher Amplitude $\hat{s}$ und Schwingungsdauer T. Da die Schwingungen harmonisch sind, wird die Elongation durch eine Sinusfunktion beschrieben. Wir betrachten zunächst die Elongation $s(0,t)$ an der Stelle $x = 0$ und lassen hier die Schwingung in der Ruhelage nach oben beginnen. Dann gilt $s(0,t) = \hat{s} \cdot \sin \omega t$ mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Wir betrachten nun eine beliebige Stelle x und es sei t_x die Zeit, die die Welle zur Ausbreitung vom Ausgangspunkt $x_0 = 0$ bis x benötigt hat. Das folgende Bild ist also die Momentaufnahme im Zeitpunkt t_x, in dem die Welle die Stelle x erreicht:



An der Stelle x beginnt also im Zeitpunkt t_x eine harmonische Schwingung wie zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an der Stelle $x_0 = 0$. Zu jedem Zeitpunkt t ist die Elongation an der Stelle x dieselbe wie zum früheren Zeitpunkt $t - t_x$ an der Stelle $x_0 = 0$, also

$$s(x,t) = s(0, t - t_x) = \hat{s} \cdot \sin(\omega(t - t_x))$$

Gemäß der Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit c und der Wellenlänge λ gilt $x = ct_x = \frac{\lambda}{T} \cdot t_x$ und wir erhalten die

$$\boxed{\textbf{Wellenfunktion: } s(x,t) = \hat{s} \cdot \sin \omega(t - \frac{x}{c}) = \hat{s} \cdot \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).}$$

Diese Wellenfunktion beschreibt eine Welle von *harmonischen* Schwingungen ohne *Dämpfung* (da $\hat{s}$ überall gleich sein sollte) und konstanter Periode T sowie Wellenlänge λ. Die Ausbreitung erfolgt *linear,* d. h. in einer Dimension.

c. Longitudinale und transversale Wellen. Es gibt aber auch andere Wellenarten. So sind z. B. Wasserwellen ebene Wellen, sie breiten sich auf der Wasseroberfläche vom Erregerzentrum aus in alle Richtungen gleichartig aus. Dadurch entstehen kreisförmige Wellen und alle Punkte auf einem Kreis um das Erregungszentrum haben dieselbe Phase und Elongation. Die Wellenlänge ist wieder der Abstand zwischen benachbarten Punkten gleicher Phase, wobei man den Abstand in Ausbreitungsrichtung, also radial misst. Die Beschreibung ebener Wellen erfolgt daher durch dieselbe Wellenfunktion wie oben, nur muss man die Ortskoordinate x durch den Abstand r vom Erregerzentrum ersetzen:

$$s(r,t) = \hat{s} \cdot \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda})\,.$$

Die früheren Bilder einer Welle sind dann vertikale Schnitte durch die sich ausbreitende Wasserwelle. Gleiches gilt auch für sog. Kugelwellen, die sich von einem Zentrum aus in alle Richtungen des Raumes ausbreiten.

Eine weitere wichtige Unterscheidung ist die zwischen sog. *Transversal-* oder *Querwellen* einserseits und den *Longitudinal-* oder *Längswellen:*

Transversalwellen:	Elongation senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.
Longitudinalwellen:	Elongation parallel zur Ausbreitungsrichtung.

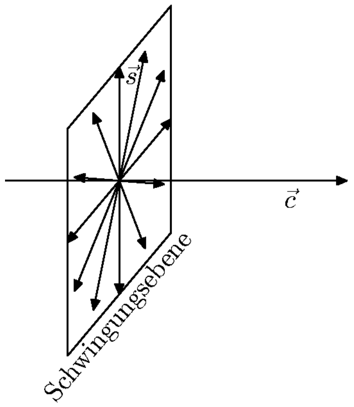
Die in der Wellenmaschine (siehe Skizzen auf S. 45) dargestellten Wellen sind Transversalwellen. Reale Beispiele dafür sind Wasserwellen (an der Oberfläche), die Wellen einer schwingenden (Gitarren- oder Geigen-)Saite, aber auch elektromagnetische Wellen (Licht).

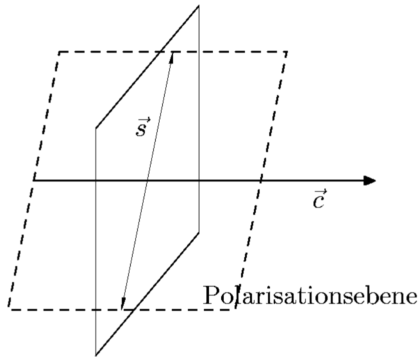
Das wichtigste Beispiel für Longitudinalwellen sind Schallwellen. Eine schwingende Lautsprechermembran zwingt die Luftmoleküle davor zu periodischen Hin- und Her-Bewegungen. Diese werden in Richtung der Bewegung der Teilchen an die Nachbarteilchen weitergegeben, so dass sich die Welle parallel zu der Schwingungsbewegung ausbreitet.

Auch Longitudinalwellen lassen sich durch die oben erarbeitete Wellenfunktion beschreiben, nur ist dann die Elongation s nicht senkrecht, sondern parallel zur Ausbreitungsrichtung zu messen.

Es gibt aber auch deutliche Unterschiede zwischen Quer- und Längswellen. Ein wichtiges Phänomen dabei ist die *Polarisation,* die nur bei Transversalwellen möglich ist. Darunter versteht man die Einschränkung der Elongation auf *eine* Richtung. Definitionsgemäß ist bei Transversalwellen die Elongation zwar *senkrecht* zur Ausbreitungsrichtung, aber sie kann innerhalb der zur Ausbreitungsrichtung orthogonalen Ebene (der *Schwingungsebene*) alle unterschiedlichen Richtungen annehmen, sie ist *nicht polarisiert* (siehe nachfolgende Skizze links). Wenn sich jedoch

nicht polarisiert **linear polarisiert**





die Elongation nur auf eine Richtung quer zur Ausbreitung beschränkt, nennt man die Welle *linear polarisiert* (siehe rechte Skizze). Die Ebene, in der der Ausbreitungsvektor $\vec{c}$ und Elongationsvektor $\vec{s}$ liegen, nennt man die *Polarisationsebene* (in der rechten Skizze mit gestrichelten Hilfslinien veranschaulicht). Die Demonstrationen von Querwellen mit der Wellenmaschine (siehe S. 45) stellen linear polarisierte Wellen dar, bei denen die Polarisationsebene gerade die Zeichenebene ist: Die x-Richtung ist die Ausbreitungsrichtung, während die Elongation s senkrecht dazu in der Zeichenebene verläuft.

d. Beispiele: Schall und Licht. Ein wichtiges Beispiel für Wellen sind *Schallwellen.* Dies sind longitudinale Wellen, deren Träger im allgemeinen die Luft ist. Schall wird erzeugt durch schwingende Körper, die die Luft zu Schwingungen anregen. Solche schwingenden Körper sind z. B. die Stimmbänder des Kehlkopfes, die Saiten eines Musikinstrumentes (Geige, Gitarre, Klavier) oder die Membran eines Lautsprechers. Die Schwingungen breiten sich dann als Schallwellen in der Luft in alle Richtungen aus.

In Luft breitet sich der Schall mit der Schallgeschwindigkeit $c = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aus. Im Vakuum gibt es keinen Schall, es fehlt der Träger. Schall kann sich auch in Flüssigkeiten und in festen Körpern ausbreiten, allerdings ist hier die Schallgeschwindigkeit (durch die stärkere Kopplung der schwingenden Systeme) z. T. deutlich höher (in Wasser $1450\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in Eis etwa $3250\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in Eisen $5920\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). In festen Stoffen kann sich Schall überdies auch transversal ausbreiten, allerdings mit anderen Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Wir wollen uns im folgenden auf Schallwellen in Luft konzentrieren. Bei Schall unterscheidet man die *Lautstärke* (die von der Amplitude bestimmt wird) und den *Ton,* der durch die Frequenz gegeben wird. Höhere Frequenzen bedeuten höhere Töne. Der Mensch kann im optimalen Fall (jung, gesund) etwa ein Tonspektrum von 16–20000 Hz wahrnehmen. Bereiche unter 16 Hz werden als *Infraschall* und Bereiche über 20000 Hz als *Ultraschall* bezeichnet. Diese Schallbereiche können von einigen Tieren wahrgenommen werden. Schallwellen im Ultraschallbereich werden auch in der Medinzin eingesetzt (Ultraschallgeräte zur Untersuchung innerer Organe).

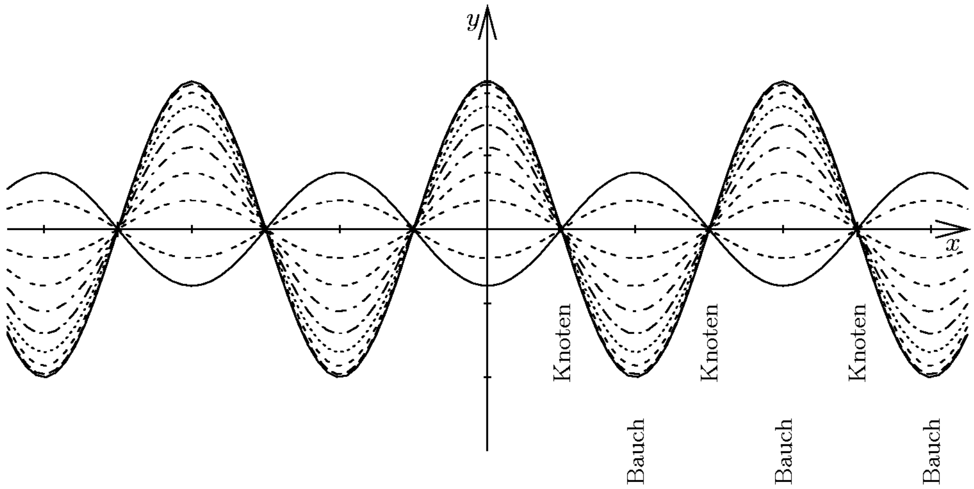
Wir haben bei den Demonstrationen einige Beispiele für verschieden hohe Töne gehört. In der Musik werden Töne durch *Noten* bezeichnet. So hat der sog. Kammerton A (a^1 oder a') eine Frequenz von 440 Hz. Davon werden dann weitere Töne abgeleitet durch sog. *Tonintervalle.* Der Ton mit doppelter Frequenz wird *Oktavton* genannt.

Das zweite fundamentale Beispiel für Wellen ist *Licht.* Diese sind jedoch keine mechanischen, sondern elektromagnetische Wellen. Daher hier nur einige grundlegende Bemerkungen:
1. Licht breitet sich mit einer enormen Geschwindigkeit aus: $c \approx 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Der Nachweis dieser hohen Geschwindigkeit ist schwierig; ein möglicher Nachweis benutzt schnell rotierende Spiegel (Foucaultscher Drehspiegelversuch), durch die ein reflektierter Lichtstrahl geringfügig vom Weg abweicht, woraus man die Geschwindigkeit bestimmen kann.
2. Die Wellenlängen von Licht sind sehr klein. Sie liegen zwischen 400 nm (rot) und 800 nm (blau/violett). Licht unterschiedlicher Wellenlängen bzw. Frequenzen wird vom Auge des Menschen als farbiges Licht wahrgenommen. Weißes Licht ist die Mischung aller Farben. Die Messung

solch kleiner Wellenlängen wird durch Interferenzversuche (siehe Abschnitt 14.) erreicht.
3. Bei einer so hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lichtwellen muss die Kopplung der schwingenden Systeme extrem stark sein. Der Träger der Lichtwellen müsste also sehr starr und massiv sein, aber gleichzeitig nicht fassbar. Am Ende des 19. Jahrhunderts wurde äußerst intensiv nach einem Träger der Lichtwellen (dem *Äther*) gesucht: Ohne Erfolg.
4. Wir wissen heute: Lichtwellen sind spezielle elektromagnetische Wellen. Die schwingenden Systeme sind (durch Induktion gekoppelte) elektrische und magnetische Felder. Sie benötigen zur Ausbreitung keinen Träger, ihr Träger ist der leere Raum. In ihm breiten sich die schwingenden elektrischen und magnetischen Felder aus und transportieren dabei Energie.
5. Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen: Die (schwingenden) elektrischen und magnetischen Felder sind beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (und senkrecht zueinander) gerichtet. Dies lässt sich durch Polarisierung nachweisen.
6. Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen umfasst nicht nur Licht, sondern viele andere Phänomene (Rundfunk- und Fernsehwellen, Mikrowellen, Infrarot- und Ultraviolettstrahlung, Röntgen- und γ-Strahlung). Eine Übersicht über das gesamte elektromagnetische Spektrum finden Sie in Metzler, Physik, S. 322f. Das sichtbare Licht ist darin nur ein sehr kleiner Abschnitt.

14. Überlagerung von Wellen, Interferenz

a. Stehende Wellen. An der Wellenmaschine haben wir die Entstehung von stehenden Wellen beobachten können. Sie kamen durch die Überlagerung gegenläufiger Wellen gleicher Amplitude und Frequenz zustande.



Der Begriff *stehende Welle* ist scheinbar ein Widerspruch in sich. Eine stehende Welle ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die Phase der einzelnen schwingenden Systeme *nicht* ausbreitet, sondern alle schwingenden Punkte synchron schwingen. Dagegen sind die Amplituden an verschiedenen Orten verschieden. So gibt es Orte, an denen die Amplitude 0 ist, also keine Schwingung stattfindet; dies sind die *Knoten* der stehenden Welle. In der Mitte zwischen je zwei Knoten gibt es die sog. (Schwingungs-)*Bäuche;* hier ist die Amplitude maximal. Die obige Skizze zeigt verschiedene Momentaufnahmen einer stehenden Welle im zeitlichen Abstand $\Delta t = \frac{T}{32}$:

Mathematische Herleitung: Wir beschreiben die gegenläufigen Wellen gleicher Amplitude und Frequenz durch ihre Wellenfunktionen

$$s_1 = \hat{s}\sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}))\,,\ s_2 = \hat{s}\sin(2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}))\,,$$

wobei die unterschiedlichen Vorzeichen bei x die entgegengesetzten Ausbreitungsrichtungen erfassen. (Wir gehen dabei zur Vereinfachung davon aus, dass zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ kein Phasenunterschied zwischen beiden Schwingungen besteht. Dies ist durch geeignete Verschiebung der Koordinaten t und x immer erreichbar.) Wir definieren in Analogie zur Kreisfrequenz

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ die sog. *Wellenzahl* $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und erhalten

$$s_1(x,t) = \hat{s}\sin(\omega t - kx)\,,\ s_2(x,t) = \hat{s}\sin(\omega t + kx)\,.$$

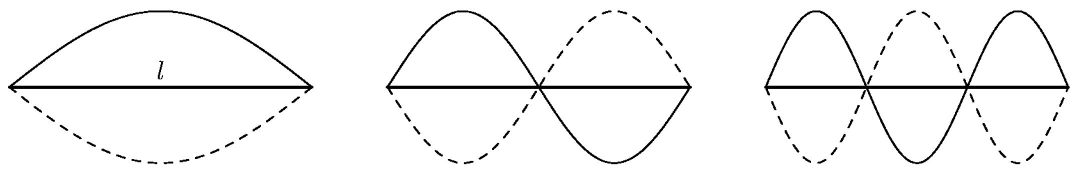
Aus dem Additionstheorem des Sinus folgt $\sin(a-b)+\sin(a+b) = 2\cos b \sin a$ und wir erhalten für die Überlagerung beider Wellen

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = \hat{s}\sin(\omega t - kx) + \hat{s}\sin(\omega t + kx) = 2\hat{s}\cos(kx)\sin(\omega t)\,.$$

Wir erkennen, dass die Abhängigkeit der Elongation s vom Ort x und der Zeit t *getrennt* ist: Die zeitliche Änderung der Elongation wird allein durch den zweiten Faktor $\sin(\omega t)$ bestimmt, während der erste Faktor $2\hat{s}\cos kx$ die ortsabhängige Amplitude der Schwingungen bestimmt. Die *Knoten* sind die Nullstellen von $\cos kx$. Die Nullstellen des Cosinus liegen im Abstand π voneinander, also haben die Knoten den Abstand $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$. In der Mitte zwischen den Knoten sind bei $\cos kx = \pm 1$ die Amplituden maximal ($= 2\hat{s}$), hier liegen die *Bäuche.* Zwischen den Knoten schwingen alle Punkte in gleicher Phase: Bei $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n eine beliebige ganze Zahl) befinden sich alle Punkte in einem der beiden Umkehrpunkte, bei $\omega t = n\pi$ befinden sie sich in der Ruhelage.

b. Reflektion und Eigenschwingungen. Stehende Wellen treten vor allem bei begrenzten Wellenträgern auf (Seil, Saite eines Musikinstrumentes, Stab, Luftsäule in einem Blasinstrument). Wird ein solcher begrenzter Wellenträger an einer Stelle in Schwingungen versetzt, so breiten sich diese über den Wellenträger aus, werden an einem Ende reflektiert, laufen zurück zum anderen Ende, werden wieder reflektiert usw. .... Auf dem Wellenträger überlagern sich also ständig gegenläufige Wellen gleicher Frequenz und Amplitude. Durch die mehrfachen Reflektionen treten jedoch i. a. viele verschiedene Phasenunterschiede zwischen den gegenläufigen Wellen auf, so dass sich die Wellen bei Überlagerung auslöschen. Nur wenn der Wellenträger eine zur Wellenlänge der Welle passende Länge hat, sind diese Phasenunterschiede immer gleich (0 oder π), so dass sich insgesamt eine stehende Welle ausbildet. Man spricht dann von einer *Eigenschwingung* des Wellenträgers.

Wir betrachten einmal die Saite etwa einer Gitarre. Diese hat eine bestimmte Länge l und ist an beiden Enden befestigt. Wenn sich nun auf dieser Saite eine stehende Welle ausbildet, so muss sie an beiden Enden einen Knoten haben (denn dort kann die Saite nicht schwingen). Dadurch ergeben sich auf einer Saite der Länge l nur bestimmte stehende Wellen wie etwa die folgenden:



Grundschwingung 1. Oberschwingung 2. Oberschwingung

Diese Liste der verschiedenen Schwingungen der Saite kann unbegrenzt fortgeführt werden: Mit jedem neuen Knoten spricht man von der nächsten Oberschwingung. Man erkennt unmittelbar den Zusammenhang zwischen der Länge l der Saite und der Wellenlänge λ_n der n-ten Oberschwingung:

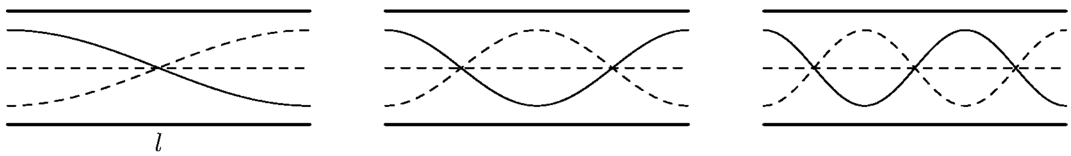
$$l = (n+1)\cdot\frac{\lambda_n}{2} \iff \lambda_n = \frac{2l}{(n+1)}\,,$$

wobei n die Ordnung der Oberschwingung ist (Grundschwingung = 0. Oberschwingung). Betrachtet man statt der Wellenlängen die Frequenzen f_n der Oberschwingungen, so zeigt sich, dass diese die ganzzahligen Vielfachen der Frequenz f_0 der Grundschwingung sind:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (n+1)\cdot\frac{c}{2l} = (n+1)f_0\,.$$

Warnung: Hierbei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwingung *längs der Saite*. Dies ist nicht die Schallgeschwindigkeit (= Ausbreitungsgeschwindigkeit in Luft)! Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist für die verschiedenen Saiten eines Instrumentes *unterschiedlich.* So kann man durch Änderung der Spannkraft der Saiten die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Saite verändern und damit Frequenz und Ton beeinflussen. Die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten erklären auch, wieso die Grundschwingung der verschiedenen Saiten bei gleicher Länge l und gleicher Wellenlänge $\lambda_0 = 2l$ unterschiedliche Frequenzen und damit unterschiedliche Töne haben können.

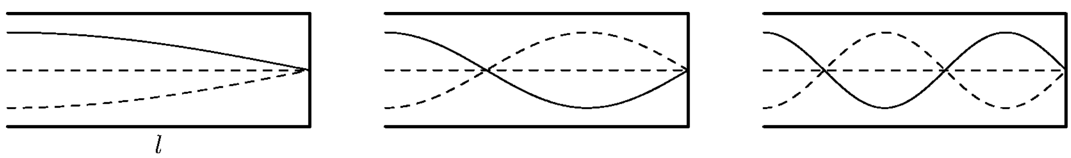
Andere Beispiele für begrenzte Wellenträger, auf denen sich stehende Wellen ausbilden, sind die Luftsäulen in Blasinstrumenten (Flöte, Orgelpfeife). Auch hier entstehen Knoten und Bäuche. Allerdings ist deren Verteilung anders als auf einer Saite, da ein Blasintrument an mindestens einer Seite *offen* ist (an der Stelle, an der man hineinbläst). An diesem Ende der Luftsäule liegt dann kein Knoten, sondern ein Bauch. Ist auch die andere Seite offen (dies ist der Regelfall), so bildet sich eine stehende Welle aus, die an beiden Seiten einen Bauch hat. Die folgenden Bilder zeigen Grund- und erste Oberschwingungen einer beidseitig offenen Flöte:



Grundschwingung 1. Oberschwingung 2. Oberschwingung

Hinweis: Die Luftsäule in der Flöte schwingt longitudinal (längs der Flöte), aber in den Skizzen ist (zur besseren Erkennbarkeit) die Elongation quer zur Ausbreitungsrichtung dargestellt.
Trotz der anderen Verteilung von Knoten und Bäuchen ergibt sich für die beidseitig offene Flöte dieselbe Beziehung zwischen der Länge l der Luftsäule und der Wellenlänge λ, sowie dieselben Frequenzverhältnisse zwischen den verschiedenen Eigenschwingungen wie oben bei einer Saite. Beachten Sie, dass hier die Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb der Luftsäule unveränderlich ist, nämlich gleich der Schallgeschwindigkeit. Ein Flöte kann man nur durch Veränderung von l zu anderen Tönen anregen. Dies geschieht etwa durch Öffnungen in der Flöte; an einer solchen Öffnung wird dann ein Schwingungsbauch erzwungen, wodurch bestimmte Eigenschwingungen unmöglich und andere bevorzugt werden. Wenn etwa in der Mitte eine Öffnung in die Flöte gebohrt wird, so liegt dort notwendig ein Schwingungsbauch, so dass die Grund- und zweite Oberschwingung nicht entstehen kann, während die erste Oberschwingung dort selbst einen Bauch hat und bevorzugt ist. Statt des Grundtons erhält man den Oktavton.

Schließlich gibt es noch einseitig geschlossene Blasintrumente (z. B. *gedackte* Orgelpfeifen). Diese haben an der geschlossenen Seite einen Knoten, an der offenen Seite einen Bauch. So ergeben sich die folgenden Bilder der ersten Eigenschwingungen:



Grundschwingung 1. Oberschwingung 2. Oberschwingung

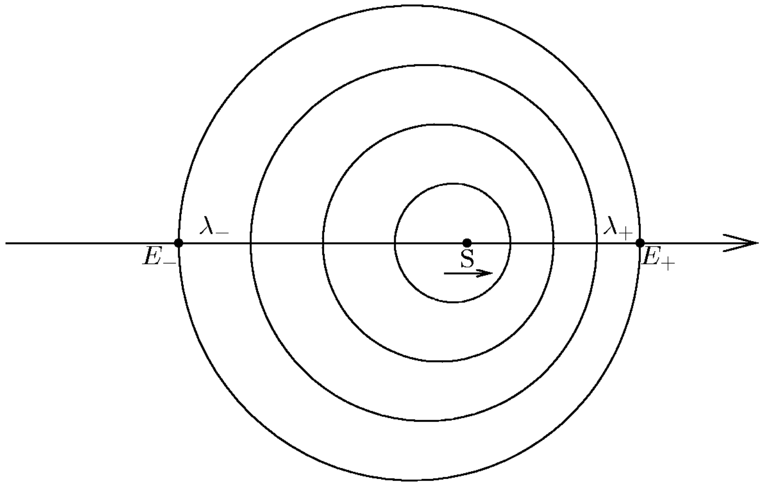
Hier gilt für die n-te Oberschwingung ($n = 0, 1, 2, 3\ldots$)

$$l = \frac{\lambda_n}{4} + n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4} \iff \lambda_n = \frac{4l}{2n+1} \iff f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{c}{4l} = (2n+1)f_0$$

Die Frequenzen der Oberschwingungen sind also die *ungeraden* Vielfachen der Grundfrequenz.

c. Doppler-Effekt. Der Doppler-Effekt ist ein Wellenphänomen, das man im täglichen Leben nicht selten beobachten kann: Ein Feuerwehrauto nähert sich mit laufendem Martinshorn; im Moment der Vorbeifahrt bemerkt man ein Absinken des Tones, die Frequenz des Tons ändert sich. Wir wollen nun die Ursachen analysieren und die quantitativen Gesetzmäßigkeiten erkunden. Der Doppler-Effekt beruht auf der Bewegung von Sender und Empfänger:

1. Bewegung des Senders: Die Bewegung des Senders verändert die *Wellenlänge* des vom Sender ausgesandten Tones. Die nachfolgende Skizze veranschaulicht diese Situation. Gezeichnet sind die Positionen verschiedener, im zeitlichen Abstand einer Schwingungsperiode T vom Sender S ausgesandter Wellenberge. Man erkennt, dass deren Abstand in Richtung der Bewegung kleiner ist als in der Gegenrichtung.



Wie kommt diese Verzerrung zustande? Wenn ein Wellenberg den Sender verlassen hat, legt er in der Zeit $T = \frac{1}{f}$ (Periodendauer des vom Sender erzeugten Tons) die Strecke $\lambda = cT$ zurück. In derselben Zeit legt der Sender S mit der Geschwindigkeit v_S die Strecke $v_S T$ zurück. Der Abstand zwischen Wellenberg und Sender zur Zeit $t = T$ ist also $cT - v_S T = (c - v_S)T$ (bei Bewegung des Senders zum Empfänger hin). Zu diesem Zeitpunkt $t = T$ strahlt der Sender nun den nächsten Wellenberg ab. Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen beträgt daher (bei Position E_+, Bewegung des Senders S zum Empfänger hin):

$$\lambda_+ = (c - v_S)T \iff f_+ = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c - v_S} f_S \,.$$

Entsprechend gilt bei Bewegung vom Empfänger weg (Position E_-, ersetze v_S durch $-v_S$):

$$\lambda_- = (c + v_S)T \iff f_- = \frac{c}{c + v_S} f_S$$

Hierbei ist f_S die Frequenz des vom Sender erzeugten Tones, $f_\pm$ bezeichnet die Frequenz beim Empfänger $E_\pm$.

2. Bewegung des Empfängers: Eine Bewegung des Empfängers verändert die *Frequenz* des empfangenen Tons. Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit v_E auf den Sender zu, so nähern sich die Wellenberge dem Empfänger mit der Geschwindigkeit $c + v_E$. Dadurch registriert der Empfänger zwei aufeinanderfolgende Wellenberge im zeitlichen Abstand T_E mit

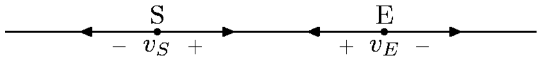
$$(c + v_E)T_E = \lambda = cT \iff f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c + v_E}{c} f \,.$$

Entsprechend gilt bei Bewegung des Empfängers vom Sender weg (ersetze v_E durch $-v_E$):

$$(c - v_E)T_E = \lambda = cT \iff f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c - v_E}{c} f \,.$$

Hierbei bezeichnet f die Frequenz des Tones in der Luft, f_E die vom Empfänger wahrgenommene Frequenz.

3. Doppler-Effekt allgemein: Wieder seien v_S und v_E die Geschwindigkeiten von Sender und Empfänger relativ zum Wellenträger, der Luft. Um eine einheitliche Formulierung zu erhalten, versehen wir diese Geschwindigkeiten mit einem Vorzeichen wie in folgender Skizze angedeutet:



Die jeweilige Geschwindigkeit ist also positiv, wenn die Bewegung zum anderen Punkt hin gerichtet ist. Nach den obigen Überlegungen verursacht die Bewegung des Senders eine Frequenz f der sich in der Luft ausbreitenden Welle (vgl. oben 1.):

$$\frac{f}{f_S} = \frac{c}{c - v_S}\,.$$

Beachten Sie: Bei positivem v_S ergibt dies die oben als f_+ bezeichnete Frequenz, während sich bei negativem v_S die Frequenz f_- ergibt.
Durch die Bewegung des Senders E wird nun diese Frequenz f verändert zu f_E mit (vgl. oben 2.)

$$\frac{f_E}{f} = \frac{c + v_E}{c}\,.$$

Zusammengenommen erhält man das folgende Verhältnis zwischen erzeugter Frequenz f_S und empfangener Frequenz f_E:

$$\boxed{\textbf{Frequenzverschiebung durch Dopplereffekt:}\quad \frac{f_E}{f_S} = \frac{c + v_E}{c - v_S}.}$$

Anmerkungen:
a) Beachten Sie unsere obigen Vereinbarungen für die Vorzeichen von v_S und v_E.
b) Diese Gesetzmäßigkeit enthält die oben hergeleiteten Beziehungen als Spezialfälle $v_E = 0$ (siehe 1.) bzw. $v_S = 0$ (siehe 2.).
c) Eine Frequenzerhöhung ($f_E > f_S$) ergibt sich genau dann, wenn sich Empfänger und Sender einander *annähern:*

$$f_E > f_S \iff c + v_E > c - v_S \iff v_E > -v_S \iff v_E + v_S > 0$$

Die Geschwindigkeit $v_E + v_S$ gibt die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger an; ist diese positiv, so liegt eine Annäherung vor. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich beide aufeinander zu bewegen.
d) Die *quantitativen* Auswirkungen des Dopplereffektes hängen nicht allein von der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger ab, sondern von den beiden Geschwindigkeiten in Bezug auf den Wellenträger (die Luft). Daher ergeben sich auch bei Bewegung des Senders andere Ergebnisse als bei entsprechender Bewegung des Empfängers. (Dies ist anders beim Dopplereffekt für elektromagnetische Wellen, insbesondere Licht. Da es für diese keinen Träger gibt, fehlt ein unabhängiger Bezugspunkt für die einzelnen Geschwindigkeiten v_S, v_E. Die damit verbundene Problematik wird erst durch die spezielle Relativitätstheorie aufgelöst.)

d. Das Huygenssche Prinzip, Brechung, Beugung. (in Planung)

e. Wellenlängenbestimmung durch Interferenz. (in Planung)

Epilog: Die Grenzen der klassischen Physik

Von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zur speziellen Relativitätstheorie.