

Übungen (Wurf)

- 1) Ein Zug fährt geradlinig in ebenem Gelände mit konstanter Geschwindigkeit.
 - a) Ein undisziplinierter Fahrgast lässt eine Flasche aus dem Fenster fallen. Sie schlägt 2 m tiefer und (horizontal gemessen) 12 m vom Abwurfpunkt entfernt auf dem Boden auf. (Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.) Welche Flugbahn der Flasche beobachtet ein Mann neben den Gleisen? Welche Bahn beschreibt die Flasche vom Zug aus gesehen? Wie schnell ist der Zug? Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Flasche auf dem Boden auf?
 - b) Ein anderer Fahrgast wirft einen Apfel quer zur Fahrtrichtung horizontal aus dem Fenster. Der Aufschlagpunkt des Apfels auf einer tiefer gelegenen Wiese ist 20 m in Fahrtrichtung und 5 m von den Gleisen entfernt (jeweils horizontal gemessen). Wie groß war die Abwurfgeschwindigkeit v_0 des Apfels quer zum Fenster? Wie tief liegt die Wiese? Wie groß war die Aufschlaggeschwindigkeit des Apfels auf der Wiese?
- 2) Eine Kugel der Masse $m = 50 \text{ g}$ wird mit Hilfe einer gespannten Feder abgeschossen. Die Feder hat die Federhärte $D = 30 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ und wird um $l = 20 \text{ cm}$ zusammengedrückt und in dieser Position fixiert.
 - a) Man löst die Feder und schießt damit die Kugel ab. Welche Geschwindigkeit erreicht dadurch die Kugel?
[Hinweis: Energie einer gespannten Feder: $W = \frac{1}{2} D l^2$, wenn D die Federhärte und l die Verkürzung bzw. Verlängerung der Feder ist.]
 - b) Die Kugel wird mit dieser Geschwindigkeit unter einem Winkel von 20° nach oben abgeschossen. Wie weit fliegt sie in ebenem Gelände?
- 3) Auf einem Förderband wird Kohle transportiert. Das Förderband ist $l = 15 \text{ m}$ lang und steigt vom Erdboden aus $h = 4 \text{ m}$ an. Das Band bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Am Ende des Bandes verlässt die Kohle das Förderband und fällt in einen bereitgestellten Wagen. Der Boden der Ladefläche befindet sich 50 cm über dem Erdboden.
In welcher horizontalen Entfernung vom Ende des Förderbandes ist der Kohlewagen aufzustellen, damit die Kohle genau in die Mitte auf den Boden des Wagens fällt?
- 4) Ein Feuerwehrmann muss ein Haus löschen. Er steht $w = 12 \text{ m}$ vom Haus entfernt und will das in $h = 6 \text{ m}$ Höhe liegende Fenster mit dem Wasserstrahl erreichen. Das Wasser verlässt die Feuerwehrspritze in $h_1 = 1,50 \text{ m}$ Höhe mit der Geschwindigkeit $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 - a) In welchem Winkel α (zur Horizontalen) muss das Wasser abgespritzt werden?
[Tip: $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$.]
 - b) Der Wasserdruck lässt nach einiger Zeit nach und die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers sinkt. Ab welchem Wert v_1 der Austrittsgeschwindigkeit kann der Feuerwehrmann das Fenster nicht mehr erreichen?

Übungen (Wurf) — Lösungen

- 1) a) Von außerhalb beobachtet man eine Wurfparabel, die Flasche bewegt sich in einem waagerechten Wurf. Aus dem Zug beobachtet bewegt sich die Flasche senkrecht nach unten im freien Fall. Flasche und Zug haben horizontal immer dieselbe Geschwindigkeit.

Die Flugzeit der Flasche ist genau die Fallzeit t ; für sie gilt

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \iff t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 0,64 \text{ s}.$$

In dieser Zeit haben sich Flasche und Zug um 12 m weiter bewegt, so dass die Geschwindigkeit

$$v = \frac{12 \text{ m}}{0,64 \text{ s}} = 18,79 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 67,65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

beträgt. Die Aufschlaggeschwindigkeit v_1 der Flasche bestimmen wir durch Energievergleich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_1^2 \iff v_1^2 = v^2 + 2gh \\ \iff v_1 &= \sqrt{(18,79 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 19,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 71,31 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

- b) In diesem Falle gilt für die Flugzeit t des Apfels

$$s = vt \iff t = \frac{s}{v} = \frac{20 \text{ m}}{18,79 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,06 \text{ s}.$$

Während dieser Zeit fällt der Apfel um die Höhe

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,06^2 \text{ s}^2 = 5,56 \text{ m}.$$

Um diesen Wert liegt die Wiese tiefer als der Abwurfpunkt.

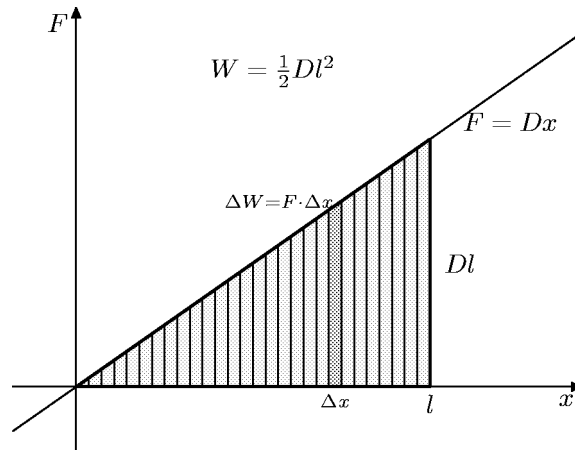
In derselben Zeit ist der Apfel quer zum Zug 5 m geflogen, also beträgt die Geschwindigkeit v_0 in dieser Richtung

$$v_0 = \frac{5 \text{ m}}{1,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Wieder bestimmen wir die Aufschlaggeschwindigkeit v_1 durch Energievergleich

$$\begin{aligned} v^2 + v_0^2 + 2gh &= v_1^2 \iff v_1^2 = (18,79^2 + 4,7^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 5,56) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 484,23 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ \iff v_1 &= \sqrt{484,23} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22,01 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 79,22 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

- 2) a) Zum Spannen der Feder benötigt man Energie. Definitionsgemäß ist Energie das Produkt aus Kraft und zurückgelegter Wegstrecke (bei gleicher Richtung). Beim Spannen der Feder ist die Kraft jedoch nicht konstant, sondern sie wächst mit der Wegstrecke. Wie bei der Herleitung des Energieinhaltes eines Kondensators erhalten wir hier für die Energie einer um die Strecke l gedehnten oder gestauchten Feder $W = \frac{1}{2}Dl^2$, wobei D die Federhärte bezeichnet.



Bei der Entspannung der Feder wird diese Energie in kinetische Energie der Kugel umgewandelt. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}Dl^2 \iff v^2 = \frac{Dl^2}{m} = \frac{30 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot (20 \text{ cm})^2}{50 \text{ g}} = \frac{120 \text{ Nm}}{0,05 \text{ kg}} = 2400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ \iff v &= 48,99 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

- b) Die Komponenten dieser Geschwindigkeit beim angegebenen Winkel von 20° sind

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v \cos \alpha = 48,99 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 20^\circ = 46,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ v_{0y} &= v \sin \alpha = 48,99 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 20^\circ = 16,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Damit gelten die Bewegungsgesetze

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Die Kugel erreicht wieder den Boden, wenn $y = 0$ ist, also nach der Zeit t mit

$$0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \iff 0 = t(2v \sin \alpha - gt) \iff t = 0 \vee t = \frac{2v \sin \alpha}{g} = 3,42 \text{ s}.$$

In dieser Zeit hat die Kugel in horizontaler Richtung die Strecke

$$x = v_{0x}t = v \cos \alpha \cdot \frac{2v \sin \alpha}{g} = \frac{2(48,99 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 157,26 \text{ m}$$

zurückgelegt.

- 3) Nach dem Verlassen des Bandes bewegt sich die Kohle in einem schiefen Wurf. Die Anfangsgeschwindigkeit ist v_0 ; die Richtung der Geschwindigkeit ist gleich der Richtung des Förderbandes. Also gilt für den Winkel α mit der Horizontalen: $\sin \alpha = \frac{h}{l} \iff \alpha = \arcsin \frac{4}{15} \approx 15,47^\circ$.

Die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit der Kohle sind daher

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \sqrt{1 - \frac{16}{225}} = 7,71 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{4}{15} = 2,13 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0,59 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Gemäß den Bewegungsgesetzen des Wurfes gilt für die Kohle nach dem Verlassen des Förderbandes

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Dabei wird das Ende des Förderbandes als Ursprung des x, y -Koordinatensystems gewählt.

Die Höhe des Wagenbodens liegt 50 cm über dem Erdboden und damit in der Höhe $y = -3,5 \text{ m}$. Wir bestimmen den Zeitpunkt t , zu dem die Kohle diese Höhe erreicht hat:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff \frac{gt^2}{2} - v_{0y}t + y = 0 \iff t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}}{g}$$

Der gesuchte Zeitpunkt t ist positiv, also

$$t = \frac{0,59 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \sqrt{0,59^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,5 \text{ m}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,91 \text{ s}.$$

Zu diesem Zeitpunkt hat die Kohle die horizontale Entfernung

$$x = v_{0x}t = 2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,91 \text{ s} = 1,94 \text{ m}$$

vom Ende des Förderbandes erreicht. An dieser Stelle muss die Mitte des Kohlewagens positioniert werden.

- 4) a) Nach den Bewegungsgesetzen des Wurfes gilt für die Position des Wassers zum Zeitpunkt t

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Dabei ist die Austrittsstelle als Koordinatenursprung gewählt.

Es sei t die Zeit, zu dem das Wasser das Haus erreicht, also

$$w = v_0 \cos \alpha \cdot t \iff t = \frac{w}{v_0 \cos \alpha}.$$

Um das Fenster zu treffen, muss für diese Zeit t gelten

$$\begin{aligned} h - h_1 = H &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{w}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gw^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= w \tan \alpha - \frac{gw^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha). \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $z = \tan \alpha$:

$$\frac{gw^2}{2v_0^2} z^2 - wz + \left(H + \frac{gw^2}{2v_0^2}\right) = 0 \iff gw^2 \cdot z^2 - 2wv_0^2 \cdot z + (2Hv_0^2 + gw^2) = 0.$$

Deren Lösungen sind

$$z = \frac{2wv_0^2 \pm \sqrt{4w^2v_0^4 - 4gw^2(2Hv_0^2 + gw^2)}}{2gw^2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(2Hv_0^2 + gw^2)}}{gw}$$

– vorausgesetzt der Radikand $v_0^4 - g(2Hv_0^2 + gw^2)$ ist nicht negativ. Konkret ergibt sich

$$\begin{aligned} z &= \frac{15^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \pm \sqrt{15^4 \frac{\text{m}^4}{\text{s}^4} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \cdot 4,5 \text{ m} \cdot 15^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12^2 \text{ m}^2)}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12 \text{ m}} \\ &= 1,91 \pm 1,1 \end{aligned}$$

Also

$$\tan \alpha = 3,02 \iff \alpha = 71,7^\circ,$$

$$\tan \alpha = 0,81 \iff \alpha = 38,9^\circ.$$

c) Die Bedingung ist, dass der soeben berechnete Radikand nicht negativ ist. Wir untersuchen, wann er gleich 0 ist.

$$v_0^4 - 2gHv_0^2 - g^2w^2 = 0.$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, eine quadratische Gleichung in v_0^2 . Deren Lösungen sind

$$v_0^2 = gH \pm \sqrt{g^2H^2 + g^2w^2} \iff v_0^2 = g(H + \sqrt{H^2 + w^2}).$$

(Das negative Vorzeichen führt zu einem negativen Wert für v_0^2 , also zu keiner Lösung.) Die Geschwindigkeit des Wasser muss also die Bedingung

$$v_0^2 \geq g(H + \sqrt{H^2 + w^2})$$

erfüllen. Im obigen Beispiel also

$$v_0^2 \geq 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4,5 + \sqrt{4,5^2 + 12^2}) \text{ m} \iff v_0 \geq \sqrt{169,87} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 13,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$