Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit dem folgenden Ansatz

$$\big(a\cos\theta, b\sin\theta, 0\big) + \lambda\big(p, q, r\big), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

daß das einschalige Hyperboloid

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

auf zwei Arten als Regelfläche dargestellt werden kann.

Aufgabe 2. Die **Tangente** an eine reguläre Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ im $\mathbb{R}^n$ im Punkt $t = t_0$ ist die Gerade

$$\big\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} = \boldsymbol{\alpha}(t_0) + \lambda\mathbf{T}(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R}\big\}\ .$$

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $\boldsymbol{\alpha}$ die durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(t, g(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$, gegebene ebene Kurve. Bestimmen Sie die Tangente an $\boldsymbol{\alpha}$ in $t = t_0$ und vergleichen Sie dies mit der aus der Analysis I bekannten Tangente an einen Graphen.

(b) Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(\sin 3t\cos t, \sin 3t \sin t\big)$ eine reguläre Kurve ist und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $t = \pi/3$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Helix $\boldsymbol{\alpha}(t) = \big(r\cos t, r\sin t, ht\big)$ (mit $r, h > 0$ gegeben) in $t = t_0$. Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ und dem Vektor $(0,0,1)$ konstant ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2+1}, \left(s + \sqrt{s^2+1}\right)^{-1}, \sqrt{2}\log\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right)$$

nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 4. Sei $\boldsymbol{\alpha}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt

$$k(s) = \big|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)\big|\ .$$

Abgabe: Montag 21.10.2013 unmittelbar **vor** der Vorlesung