Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei R ein Polygon in einem Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \to M \subset \mathbb{R}^3$. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß das Integral $\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} KdA$ den Winkel mißt, um den sich ein entlang der Randkurve $\boldsymbol{\gamma}$ von R parallel verschobenes Vektorfeld $\mathbf{X}$ dreht. Wir nehmen dazu an, daß der metrische Tensor die Form $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$ mit $h > 0$ hat (geodätische Parallelkoordinaten). Schreibe $\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right)$ mit Bogenlängenparameter s und

$$\mathbf{X}(s) = \cos\varphi(s)\ \mathbf{x}_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) + \frac{\sin\varphi(s)}{h}\ \mathbf{x}_2\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right).$$

Zeigen Sie nun, daß

$$\varphi'(s) = -h_1\left(\gamma^1(s), \gamma^2(s)\right) \cdot \left(\gamma^2\right)'(s).$$

Folgern Sie daraus, daß sich $\mathbf{X}$ bei einem Umlauf von $\boldsymbol{\gamma}$ um den Winkel $\triangle\varphi = \int_{\boldsymbol{\gamma}} \varphi' ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} KdA$ dreht.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß $(0,0)$ eine Nullstelle der folgenden Vektorfelder ist und berechnen Sie deren Index in der Ebene in $(0,0)$:

- (i) $\mathbf{X}(u,v) = (u,v)$,
- (ii) $\mathbf{X}(u,v) = (-u,v)$,
- (iii) $\mathbf{X}(u,v) = (u,-v)$,
- (iv) $\mathbf{X}(u,v) = (u^2 - v^2, -2uv)$,
- (v) $\mathbf{X}(u,v) = (u^3 - 3uv^2, v^3 - 3u^2v)$.

(b) Kann es vorkommen, daß der Index einer Nullstelle Null ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 3. Was kann man über die Existenz von Vektorfeldern ohne Nullstellen auf nichtkompakten Flächen aussagen?

Abgabe: Montag 13.01.14

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)