WS 2013/14 Dr. Kai Zehmisch

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Zeigen Sie direkt aus der Definition der Lie-Ableitung, daß für Vektorfelder X, Y auf einer Mannigfaltigkeit M und $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$L_X(\varphi Y) = (X\varphi)\, Y + \varphi L_X Y.$$

Bemerkung. Die Identität $L_X Y = [X, Y]$ darf bei diesem Beweis nicht verwendet werden, da wir die obige Gleichung benötigen, um diese Identität herzuleiten.

Aufgabe 2. Seien $X = \partial_x$ und $Y = x\partial_y$ Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie den Fluß ϕ_t und ψ_t von X bzw. Y.

(b) Für $p \in M$ setze

$$\beta_p(t) = \psi_{-\sqrt{t}}\; \phi_{-\sqrt{t}}\; \psi_{\sqrt{t}}\; \phi_{\sqrt{t}}\; (p).$$

Verifizieren Sie, daß für $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\beta_p(t)) - \varphi(\beta_p(0))}{t} = [X, Y]_p\, \varphi.$$

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß diese Identität für beliebige M, X, Y, φ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m+1}\right)$ mit $\mathrm{grad} f \neq 0$ auf $M := \{f = 0\}$. Dann ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+1}$. Schreibe $\mathbf{n} = \dfrac{\mathrm{grad} f}{||\mathrm{grad} f||}$. Für Vektorfelder X, Y auf M, setze

$$D_X Y = D_X^{\mathbb{R}^{m+1}} Y - \langle D_X^{\mathbb{R}^{m+1}} Y, \mathbf{n}\rangle \mathbf{n}.$$

Hier bezeichnet $D^{\mathbb{R}^{m+1}}$ die gewöhnliche Richtungsableitung auf $\mathbb{R}^{m+1}$. Zeigen Sie, daß $D_X Y$ eine kovariante Ableitung auf M definiert.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die kovariante Ableitung für $m = 2$ die Ableitungsgleichungen (Satz 3.4(a)) liefert.

Aufgabe 4. Eine $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit M heißt parallelisierbar, falls es m Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ auf M gibt, so daß $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ eine Basis von T_pM ist für jeden Punkt $p \in M$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^m$, S^1, S^3 und der $2-$Torus T^2 parallelisierbar sind. Ist S^2 parallelisierbar?

Abgabe: Montag 03.02.14

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)