Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Man betrachte eine Kurve in der $(r, z)-$Ebene gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a, b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die $z-$Achse gedreht wird, erhalten wir eine **Rotationsfläche**. Diese Fläche können wir wie folgt parametrisieren. Dazu ist es nützlich, die Parameter t und φ zu verwenden, wobei t die Position auf der Kurve bestimmt und φ den Drehwinkel. Dann können wir definieren

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t)) \quad \text{für } t \in (a, b) \text{ und } \varphi \in (0, 2\pi).$$

Die $t-$Kurven heißen **Meridiane** und die $\varphi-$Kurven **Breitenkreise**.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{x}$ ein parametrisches Flächenstück ist, falls $\boldsymbol{\alpha}$ regulär und injektiv ist. Berechnen Sie $\mathbf{x}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial t$, $\mathbf{x}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial\varphi$ und den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$.

(b) Betrachten Sie die zu $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, daß die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und beschreiben Sie die dort genannten Größen explizit. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten einer Rotationsfläche.

Aufgabe 2. Betrachten Sie das parametrische Flächenstück

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)\,, \quad r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Komponenten des metrischen Tensors (g_{ij}). Sei $\boldsymbol{\alpha}(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = \mathrm{e}^{t(\cot\theta)/2}$ und $\varphi(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, \pi]$ und einer Konstanten θ. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, daß θ der Winkel zwischen der Kurve $\boldsymbol{\alpha}(t)$ und den Kurven $\varphi =$ konst. auf dem Flächenstück ist.

Für ein Flächenstück $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ bezeichne $\mathbf{n}$ den Einheitsnormalenvektor. Setze

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Dann ist die **zweite Fundamentalform**

$$L_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{n} \rangle.$$

Bezeichnet man die Inverse zu (g_{ij}) mit $(g^{\ell k})$, so sind die **Christoffelsymbole** durch

$$\Gamma^k_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_\ell \rangle g^{\ell k}$$

gegeben.

Aufgabe 3. Sei $f\colon V \to U$ eine Koordinatentransformation. Mit L_{ij}, Γ^k_{ij} seien die zweite Fundamentalform bzw. die Christoffelsymbole des Flächenstücks $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ bezeichnet, mit $\overline{L}_{\alpha\beta}, \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ die entsprechenden Größen für $\mathbf{y}\colon V \to \mathbb{R}^3$, wobei $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Bis auf das Vorzeichen von $\det\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right)$ transformiert sich L_{ij} wie g_{ij}:

$$L_{ij} = \pm \overline{L}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j}$$

(b) Die Christoffelsymbole transformieren sich wie folgt:

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \left(\Gamma^k_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right) \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}.$$

Aufgabe 4. Sei $\boldsymbol{\gamma}$ eine Kurve mit Spur auf S^2. Zeigen Sie:

(a) k_n ist konstant.

(b) Ist k_g konstant, dann ist $\boldsymbol{\gamma}$ ein Kreis.

(c) Ist $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische, d.h. $k_g \equiv 0$, dann ist $\boldsymbol{\gamma}$ ein Großkreis.

Bonusaufgabe. (a) Führen Sie die Berechnungen der Beispiele (1) bis (4) Abschnitt 3.3 der Vorlesung aus.

(b) Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt unabhängig von der Wahl der lokalen Parametrisierung der Fläche ist.

(c) Zeigen Sie: $A(\mathrm{S}^2) = 4\pi$.

(d) Berechnen Sie L_{ij}, Γ^k_{ij} für S^2 in Kugelkoordinaten (siehe Beispiel (2) Abschnitt 3.1).

Abgabe: Montag 11.11.13

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)