Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

(a) Sei M eine Fläche und Π eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die M in einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ schneidet. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist, falls Π eine Symmetrieebene von M ist.

(b) Jede Gerade auf einer Fläche ist eine Geodätische.

(c) Sei M die Fläche $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Finden Sie möglichst viele Geodätische auf M.

Aufgabe 2. Man bilde den Durchschnitt des Zylinders $\{x^2 + y^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ mit einer Ebene, die die $x-$Achse enthält und einen Winkel θ mit der $xy-$Ebene bildet.

(a) Zeigen Sie, daß die Schnittkurve $\boldsymbol{\gamma}$ eine Ellipse ist.

(b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung und die Normalkrümmung von $\boldsymbol{\gamma}$, aufgefaßt als Kurve im Zylinder, in den Punkten, in denen die Ellipse ihre Achsen schneidet.

Aufgabe 3.

(a) Die Matrix (L_{ij}), die die zweite Fundamentalform beschreibt, ist für eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 1 vom Übungsblatt 4 gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}} \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{r} & 0 \\ 0 & r\dot{z} \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $\det(L_{ij}) = 0$ genau dann, wenn jeder Meridian eine Gerade ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie ein Flächenstück von der Form

$$\mathbf{x}\left(u^1, u^2\right) = \left(u^1, u^2, f(u^1, u^2)\right),$$

d.h. einen Graphen. Berechnen Sie die erste und die zweite Fundamentalform (g_{ij}), (L_{ij}). Bestimmen Sie das Christoffel-Symbol Γ^2_{11} sowohl extrinsisch (d.h. mittels der ursprünglichen Definition) als auch intrinsisch (d.h. mittels Satz 3.5).

b.w.

Bonusaufgabe.

(a) Sei $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück. Ein differenzierbares **Vektorfeld** auf der Fläche $M = \mathbf{x}(U)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{X}\left(u^1, u^2\right) = X^j\left(u^1, u^2\right)\mathbf{x}_j\left(u^1, u^2\right),$$

wobei X^1 und X^2 differenzierbare Funktionen $U \to \mathbb{R}$ sind. Dies bedeutet, daß $\mathbf{X}\left(u^1, u^2\right)$ ein Vektor in der Tangentialebene an M im Punkt $\mathbf{x}\left(u^1, u^2\right)$ ist. Sei nun $\mathbf{y}\colon V \to \mathbb{R}^3$ eine weitere Parametrisierung dieses Flächenstücks, d.h. $\mathbf{x}(U) = \mathbf{y}(V)$. Gegeben seien zwei differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{X} = X^j\mathbf{x}_j = \overline{X}^\beta\mathbf{y}_\beta$ und $\mathbf{Y} = Y^i\mathbf{x}_i = \overline{Y}^\alpha\mathbf{y}_\alpha$. Definiere

$$Z^k = \frac{\partial Y^k}{\partial u^j}X^j + \Gamma^k_{ij}Y^iX^j$$

und

$$\overline{Z}^\gamma = \frac{\partial \overline{Y}^\gamma}{\partial v^\beta}\overline{X}^\beta + \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\overline{Y}^\alpha\overline{X}^\beta.$$

Beweisen Sie $\overline{Z}^\gamma = Z^k\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}$. Dies zeigt, daß $Z^k\mathbf{x}_k = \overline{Z}^\gamma\mathbf{y}_\gamma$ ein Vektorfeld $\mathbf{Z}$ definiert. Man nennt $\mathbf{Z}$ die **kovariante Ableitung** von $\mathbf{Y}$ bzgl. $\mathbf{X}$ und schreibt $Z = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$. Dies ist einer der wichtigsten Begriffe der modernen Differentialgeometrie; er wurde 1917 von Tullio Levi-Civita eingeführt.

(b) Sei $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{x}\left(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\right)$ eine Kurve in der Fläche M und $\mathbf{X}(t) = \dot{\gamma}(t)$. Sei ein Vektorfeld entlang $\boldsymbol{\gamma}$ definiert durch $\mathbf{Y}(t) = Y^i(t)\mathbf{x}_i\left(\gamma^1(t), \gamma^2(t)\right)$. Zeigen Sie, daß für diesen Spezialfall gilt: $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \left(\dot{Y}^k + \Gamma^k_{ij}Y^i\dot{\gamma}^j\right)\mathbf{x}_k$. In dieser speziellen Form werden wir die kovariante Ableitung in der Vorlesung zuerst kennenlernen.

Abgabe: Montag 18.11.13

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)