Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine Kurve auf einer Fläche M von $p = \boldsymbol{\alpha}(0)$ nach $q = \boldsymbol{\alpha}(1)$. Für $\mathbf{X}_0 \in T_pM$ sei $\mathbf{X}(t)$, $t \in [0,1]$, die Parallelverschiebung von $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ entlang $\boldsymbol{\alpha}$. Definiere $\boldsymbol{\alpha}^\sharp \colon T_pM \to T_qM$ durch $\boldsymbol{\alpha}^\sharp(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}(1)$. Zeigen Sie:

(a) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist eine lineare Abbildung.

(b) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist eine Isometrie, d.h.

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha}^\sharp\left(\mathbf{X}_0\right), \boldsymbol{\alpha}^\sharp\left(\mathbf{Y}_0\right)\right\rangle = \left\langle \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\right\rangle \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0 \in T_pM.$$

(c) $\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ ist ein Isomorphismus.

$\boldsymbol{\alpha}^\sharp$ heißt der durch $\boldsymbol{\alpha}$ definierte **Parallelismus**.

Aufgabe 2. Man betrachte die obere Halbebene

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y > 0\right\}$$

mit der durch $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$ gegebenen sogenannten **hyperbolischen Metrik**.

Bemerkung. Man kann zeigen, daß sich $\mathbb{R}^2_+$ mit dieser Metrik nicht als Fläche im $\mathbb{R}^3$ realisieren läßt, d.h. es gibt kein parametrisches Flächenstück $\mathbf{x} \colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle$. Dennoch lassen sich alle intrinsischen Überlegungen bezgl. dieser Metrik durchführen.

(a) Verifizieren Sie die folgenden Ausdrücke für die Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} &= 0,\\ \Gamma^2_{11} &= 1/y,\\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} &= -1/y.\end{aligned}$$

(b) Die Geodätische $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\big(\gamma^1(0), \gamma^2(0)\big) = (x_0, 1)$ und $\big((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)\big) = (0,1)$ ist gegeben durch $\gamma^1 \equiv x_0$, $\gamma^2(s) = e^s$.

(c) Die Geodätische $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\big(\gamma^1(0), \gamma^2(0)\big) = (a, r)$ und $\big((\gamma^1)'(0), (\gamma^2)'(0)\big) = (r,0)$ ist gegeben durch $\gamma^1(s) = a + r\tanh s$, $\gamma^2(s) = \dfrac{r}{\cosh s}$. Zeigen Sie außerdem, daß $\boldsymbol{\gamma}$ ein Halbkreis in $\mathbb{R}^2_+$ (bzgl. der euklidischen Metrik) ist mit Mittelpunkt auf der $x-$Achse.

(d) Sei $\mathbf{X}_0 = (0,1)$ ein Tangentialvektor im Punkt $(0,1)$ von $\mathbb{R}^2_+$. ($\mathbf{X}_0$ ist Einheitsvektor in $T_{(0,1)}\mathbb{R}^2_+$ bezgl. der hyperbolischen Metrik.) Sei $\mathbf{X}(t)$ die Parallelverschiebung von $\mathbf{X}_0$ längs der Kurve $x = t$, $y = 1$. Zeigen Sie, daß der Winkel zwischen $\mathbf{X}(t)$ und der y-Achse gleich t ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform des Helikoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$$

und des Katenoids

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av).$$

Hier sind a und c positive reelle Konstanten.

Aufgabe 4. (a) Sei $\boldsymbol{\gamma}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche M, und sei $\mathbf{S}$ die intrinsische Normale entlang $\boldsymbol{\gamma}$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{S}$ genau dann parallel entlang $\boldsymbol{\gamma}$ ist, wenn $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist.

(b) Sei $\boldsymbol{\gamma}$ wie in (a), mit Krümmung $k \neq 0$. Sei $\mathbf{X}_N$ die Komponente von $\mathbf{N}$ tangential an M. Zeigen Sie, daß $\mathbf{X}_N = \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$, und daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbf{X}_N \equiv 0$,

(ii) $\boldsymbol{\gamma}$ ist eine Geodätische,

(iii) $\mathbf{X}_N$ ist parallel entlang $\boldsymbol{\gamma}$.

Abgabe: Montag 25.11.13

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)