Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Ein Einheitsvektor $\mathbf{X} \in T_pM$ heißt **asymptotische Richtung**, falls $\mathrm{II}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$. Eine **asymptotische Kurve** auf der Fläche M ist eine reguläre Kurve, deren Einheitstangentialvektor in jedem Kurvenpunkt eine asymptotische Richtung von M repräsentiert.

(a) Eine Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ mit Krümmung $k \neq 0$ und Spur auf einer Fläche M ist eine asymptotische Kurve genau dann, wenn die Schmiegebene von $\boldsymbol{\alpha}$ in jedem Kurvenpunkt mit der Tangentialebene von M zusammenfällt.

(b) Jede Gerade auf einer Fläche ist eine asymptotische Kurve.

(c) Eine Geodätische ist eine asymptotische Kurve genau dann, wenn sie eine Gerade ist.

(d) Alle asymptotischen Kurven im Flächenstück $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ sind Geraden.

Aufgabe 2.

(a) Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine Kurve mit Spur auf einer Fläche M. Schreibe $\mathbf{n}(t)$ für die Flächennormale in $\boldsymbol{\alpha}(t)$. Zeigen Sie: Notwendig und hinreichend dafür, daß $\boldsymbol{\alpha}$ eine Krümmungslinie von M ist, ist

$$\dot{\mathbf{n}}(t) = \lambda(t)\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$$

mit einer differenzierbaren Funktion $\lambda(t)$, die dann bis auf das Vorzeichen die entsprechende Hauptkrümmung in $\boldsymbol{\alpha}(t)$ darstellt.

(b) Angenommen, $\boldsymbol{\alpha}$ ist eine Krümmungslinie, die nirgends tangential zu einer Asymptotenrichtung ist, und deren Schmiegebene einen konstanten Winkel mit der Tangentialebene an M im jeweiligen Kurvenpunkt bildet. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\alpha}$ eine ebene Kurve ist.

Aufgabe 3. Der $2-$Torus T^2 ist die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch Rotation des Kreises $(r-2)^2+z^2 = 1$ in der $(r, z)-$Ebene um die $z-$Achse entsteht. Er läßt sich (bis auf einen Meridian und einen Längenkreis) parametrisieren durch

$$\mathbf{x}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)\,, \quad (u, v) \in (0, 2\pi)$$

Bestimmen Sie die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung.

Aufgabe 4. Sei $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisches Flächenstück. Ein zu $\mathbf{x}$ paralleles Flächenstück ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + c\,\mathbf{n}(u,v),$$

wobei c eine Konstante und $\mathbf{n}$ die Normale an das Flächenstück $\mathbf{x}$ ist. Zeigen Sie:

(a)
$$\mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 = \left(1 - 2Hc + Kc^2\right) \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2,$$

wobei H und K die mittlere Krümmung bzw. Gauß-Krümmung von $\mathbf{x}$ bezeichnen.

(b) Es bezeichne L die Weingarten-Abbildung für $\mathbf{x}$, und $\widetilde{L}$ die Weingarten-Abbildung für $\mathbf{y}$. Aufgrund von (a) kann die Tangentialebene an $M = \mathbf{x}(U)$ im Punkt $\mathbf{x}(u,v)$ mit der Tangentialebene an $\mathbf{y}(U)$ im Punkt $\mathbf{y}(u,v)$ identifiziert werden. Unter dieser Identifikation gilt

$$L = \widetilde{L}\,(I - cL)\,,$$

wobei I die identische Abbildung $T_pM \to T_pM$ bezeichnet.

(c) In allen regulären Punkten von $\mathbf{y}$ ist die Gauß-Krümmung $\widetilde{K}$ gegeben durch

$$\widetilde{K} = \frac{K}{1 - 2Hc + Kc^2},$$

und die mittlere Krümmung $\widetilde{H}$ durch

$$\widetilde{H} = \frac{H - Kc}{1 - 2Hc + Kc^2}.$$

Bonusaufgabe. Berechnen Sie explizit die zweite Fundamentalform und die Weingarten-Abbildung der $2-$Sphäre vom Radius r mittels der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \quad \text{für } (\theta,\varphi) \in (0,\pi) \times (0,2\pi).$$

Abgabe: Montag 02.12.13

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkästen im Container bei der Physik (Gebäude 318)