

**10. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“**

Abgabe: Montag, 23.6.2013, bzw. Dienstag, 24.6.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

**Geben Sie bei allen Aufgaben die verwendeten Formeln an. Auch diese werden bepunktet.  
Runden Sie Ihre Ergebnisse (wenn nötig) auf die fünfte Nachkommestelle.**

**Aufgabe 1 (schriftlich)**

- a)  $X$  sei exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ , das heißt  $X$  sei stetig verteilt mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .

- b) Geben Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable  $Y$  aus Aufgabe 2 von Blatt 7 an.  
c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable  $Y$  aus Aufgabe 5 a) von Blatt 8.

**8 Punkte**

**Aufgabe 2 (schriftlich)**

Sie wollen statistische Aussagen über die Höhe einer im Labor gezüchteten Pflanze machen. Die Höhe der Pflanze (in cm) zum Untersuchungszeitpunkt modellieren Sie mittels einer normalverteilten Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert 10 und Varianz 9, also  $X \sim N(10, 9)$ .

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe der Pflanze zum Untersuchungszeitpunkt zwischen 9 cm und 11 cm liegt.  
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Pflanze zum Untersuchungszeitpunkt größer als 14 cm ist?  
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Pflanze zum Untersuchungszeitpunkt kleiner als 8 cm ist.  
d) Wie wahrscheinlich ist in diesem Modell der nicht realistische Fall, dass die Höhe der Pflanze negativ ist?

**5 Punkte**

[BITTE WENDEN]

### Aufgabe 3 (schriftlich)

Die Dichte einer stetig verteilten Zufallsvariable  $X$  sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ (x-1)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} & \text{für } 2 \leq x \leq \frac{10}{3}, \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{10}{3}. \end{cases}$$

- Skizzieren Sie  $f(x)$ .
- Bestimmen und skizzieren Sie die zugehörige Verteilungsfunktion,
- Berechnen Sie  $E(X)$ .

**7 Punkte**

### Aufgabe 4 (mündlich)

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und zwei roten Kugeln wird viermal ohne Zurücklegen gezogen. Betrachten Sie die Zufallsvariablen

$X$  = „Anzahl des Zuges, in dem die zweite rote Kugel gezogen wird“,

$Y$  = „Anzahl der schwarzen Kugeln, die in den ersten drei Zügen gezogen werden“.

- Stellen Sie das oben beschriebene viermalige Ziehen mittels eines Wahrscheinlichkeitsbaumes dar.
- Bestimmen Sie die Verteilungen von  $X$  und  $Y$ .
- Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$  und  $Y$ .
- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung von  $X$  und  $Y$ .

### Aufgabe 5 (mündlich)

Für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $\Phi(x)$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ , dass  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  ist. Machen Sie sich diese Symmetrieeigenschaft anhand folgender Skizzen klar:

- Skizzieren Sie die Dichte der Standardnormalverteilung  $\varphi(x)$ .
- Schraffieren Sie für ein beliebiges  $x$  in der obigen Skizze den Bereich, der  $\Phi(-x)$  darstellt.
- Schraffieren Sie für dieses  $x$  den Bereich in der obigen Skizze, der  $\Phi(x)$  darstellt.
- Schraffieren Sie für dieses  $x$  den Bereich in der obigen Skizze, der  $1 - \Phi(x)$  darstellt.
- Wo sehen Sie nun die oben erwähnte Symmetrieeigenschaft?