Dr. Kai Zehmisch
Dipl.-Math. Hella Timmermann SS 2013

## 11. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“

Abgabe: Montag, 30.6.2013, bzw. Dienstag, 1.7.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

**Geben Sie bei allen Aufgaben die verwendeten Formeln an. Auch diese werden bepunktet. Runden Sie Ihre Ergebnisse (wenn nötig) auf die vierte Nachkommestelle.**

### Aufgabe 1 (schriftlich)

Sie führen im Labor ein Experiment mit einem komplizierten Versuchsaufbau durch. Aus Erfahrung wissen Sie, dass Sie bei jeder Durchführung des Experiments mit einer Wahrscheinlichkeit $p$ keinen Fehler machen werden. Um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten müssen Sie das Experiment $r$ mal korrekt durchführen. Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Anzahl der Misserfolge, die Sie haben, bis Sie das Experiment zum ersten mal $r$ mal korrekt durchgeführt haben. $X$ folgt dabei der sogenannten *negativen Binomialverteilung*, das heißt für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^r \; p^k.$$

a) Sie benötigen Ergebnisse von drei korrekt durchgeführten Experimenten. Berechnen Sie für $p = 0.9$ die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als zwei Misserfolge erleiden, bis Sie ihr Ziel erreicht haben.

   Hinweis: $0! := 1$

b) Berechnen Sie für $r = 1$ den Erwartungswert von $X$.

   Hinweis: Sie dürfen die *geometrische Reihe* verwenden: Für $p \in (0,1)$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$.

**5 Punkte**

### Aufgabe 2 (schriftlich)

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen $X$ sei gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 5, \\ \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{6} & \text{für } 5 \leq x \leq 7, \\ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{61}{3} & \text{für } 7 \leq x \leq 8, \\ 1 & \text{für } 8 \leq x. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion.

b) Tragen Sie (ohne die Quantile vorher zu berechnen) auf der Skizze ein, wo der Median, das 70%-Quantil und das 20%-Quantil liegen.

c) Berechnen Sie den Median, das 70%-Quantil und das 20%-Quantil.

**5 Punkte**

[BITTE WENDEN]

**Aufgabe 3** (schriftlich)

Die Länge von ausgewachsenen ostafrikanischen Riesenschnurfüßern (archispirostreptus gigas, in Kenia oft auch „Mombasa Express“ genannt) liegt normalerweise zwischen 15 und 20 cm. Allerdings gibt es mitunter auch daumenstarke „Prachtexemplare“ von ca. 30 cm Länge. Ein Zoologe hat nun bei elf dieser Riesenschnurfüßer die folgenden Längen (in cm) beobachtet:

$$12.3,\ 23.4,\ 21.7,\ 22.8,\ 22.0,\ 13.5,\ 30.9,\ 21.7,\ 22.5,\ 22.4,\ 23.1.$$

Geben Sie unter der Annahme, dass die Länge von ausgewachsenen ostafrikanischen Riesenschnurfüßern normalverteilt ist, ein 99%iges Konfidenzintervall für die durchschnittliche Länge an.

**5 Punkte**

**Aufgabe 4** (schriftlich)

Es bezeichne $X$ die Größe der Studenten in der Vorlesung (in cm). Nehmen Sie an, dass $X$ normalverteilt ist, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2025$. Für das arithmetische Mittel von $X$ konnten Sie mithilfe einer Stichprobe (Befragung) von $n = 65$ Personen den Wert $x_M = 170$ bestimmen.

a) Ermitteln Sie zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert von $X$.

b) Wie groß müsste Ihre Stichprobe sein, damit die Länge des Konfidenzintervalls höchstens 20 cm beträgt?

**5 Punkte**

**Aufgabe 5** (mündlich)

Die Sproßhöhe (in mm) $X$ einer Pflanze sei $N(\mu, 100)$-verteilt. Für den Mittelwert von $X$ wurde mit Hilfe einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_{40}$ der Schätzwert $x_M = 300$ bestimmt. Man bestimme ohne Verwendung der Formel aus der Vorlesung ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert von $X$ zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Die Summe unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt, genauer gesagt ist

$$Y := \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n\ \sigma^2}} \sim N(0, 1),$$

wobei in unserem Fall $n = 40$ und $\sigma^2 = 100$ ist. Finden Sie einen um Null symmetrischen Bereich, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass $Y$ in diesem Bereich liegt 95% beträgt, das heißt, geben Sie einen Wert $a$ an, so dass

$$P(-a \leq Y \leq a) = 0.95$$

ist.

b) Setzen Sie für $Y$ die in (a) angegebene Darstellung ein und lösen Sie die Ungleichung

$$-a \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n\ \sigma^2}} \leq a$$

so auf, dass der unbekannte Erwartungswert $\mu$ in der Mitte steht. Nutzen Sie dabei $\sum_{i=1}^{n} X_i/n = x_M$.

c) Geben Sie das Konfidenzintervall an.

Warum ist es in Teil a) sinnvoll, den Bereich symmetrisch um 0 zu wählen?

[ BITTE WENDEN ]

**Aufgabe 6 (mündlich)**

a) Bei einem Versuch wird die Reaktionszeit von 80 zufällig ausgewählten Probanden auf ein bestimmtes visuelles Signal gemessen. Die hierbei ermittelte durchschnittliche Reaktionszeit der Testpersonen lag bei 0.8 Sekunden. Geben Sie unter der Annahme, dass die die Reaktionszeit beschreibende Zufallsvariable normalverteilt mit einer Varianz von 0.04 ist, ein 95%iges Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Zufallsvariablen an.

b) Was ändert sich bei der Berechnung des Konfidenzintervalls, wenn Sie die Varianz nicht kennen und Sie aufgrund der Daten einen Schätzwert von $s_n^2 = 0.04$ ermittelt haben (die durchschnittliche Reaktionszeit sowie der Stichprobenumfang jedoch weiterhin die obigen Werte annehmen)? Führen Sie Ihre Rechnungen in diesem Fall erneut durch.