Dr. Kai Zehmisch
Dipl.-Math. Hella Timmermann

SS 2013

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie"

Abgabe: Montag, 6.5.2013, bzw. Dienstag, 7.5.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Aufgabe 1 (schriftlich)

Im vereinfachten und mittlerweile überholten 1-Gen-Modell von G. C. Davenport und C. B. Davenport wird die Vererbung der Augenfarbe über ein diploid vorliegendes Gen gesteuertes, welches zwei Ausprägungen besitzen kann: Ausprägung B für braune Augen und Ausprägung b für blaue Augen. Das heißt, es sind die folgenden Ausprägungen möglich:

$$(B, B),\ (B, b),\ (b, b),$$

die mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auftreten:

$$P((B, B)) = 0,4,\ \ P((B, b)) = 0,5,\ \ P((b, b)) = 0,1.$$

Bei der Vererbung wird von jedem Elternteil ein Gen weitergegeben, wobei die Auswahl der Gens zufällig erfolge.

a) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit die Genotypfrequenzen von B und b an.

b) Geben Sie mithilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit an, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Elternteil b weiter vererbt und die Kombination (B, b) besitzt.

c) Man wisse nun, dass die Mutter das Gen b weitergegeben habe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mutter selbst die Kombination (B, b) besitzt?

3 Punkte

Aufgabe 2 (schriftlich)

Ein Produkt werde in zwei verschiedenen Fabriken produziert, wobei die erste Fabrik 2% und die zweite Fabrik 5% defekte Produkte ausliefere. Ein Kunde, der das Produkt kaufen möchte, besucht ein Geschäft, das zu einem Drittel von der ersten Fabrik und zu zwei Dritteln von der zweiten Fabrik beliefert wird.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein in diesem Geschäft angebotenes Produkt defekt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt defekt ist und aus der ersten bzw. zweiten Fabrik stammt?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein defektes Produkt aus der ersten bzw. zweiten Fabrik stammt?

5 Punkte

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 3 (schriftlich)

Gehen Sie davon aus, dass ein Anteil von p der Bevölkerung unter der Dusche singt. In einer Studie soll nun ermittelt werden, wie groß p ist. Da es einigen Befragten zu unangenehm sein mag, zuzugeben, ob sie unter der Dusche singen, werden die Testpersonen gebeten, (heimlich) zu würfeln und ihre Antwort auf die Frage, ob sie unter der Dusche singen, wie folgt zu geben:

- Zeigt der Würfel eine Eins, soll die Testperson immer mit „Ja" antworten, unabhängig davon ob sie unter der Dusche singt oder nicht.
- Zeigt der Würfel eine Zahl zwischen Zwei und Fünf, soll die Testperson wahrheitsgemäß antworten.
- Zeigt der Würfel eine Sechs, soll die Person immer mit „Nein" antworten.

Aufgrund dieses Tricks ist es nun nicht mehr möglich, von der Antwort einer befragten Person auf ihr tatsächliches Singverhalten zu schließen.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass die Peron mit „Ja" antwortet unter der Bedingung, dass der Würfel eine Eins (Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs) zeigt.

b) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit eine Formel für das Ereignis $J =$ „Testperson antwortet mit Ja" an.

c) Bei der Studie sei herausgekommen, dass $P(J) = 2/3$ ist. Geben Sie mit Hilfe von b) die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person unter der Dusche singt.

3 Punkte

Aufgabe 4 (mündlich)

Bei den Aufgaben 1 und 2 haben Sie bereits unbemerkt den Satz von Bayes verwendet. Dieser lautet:

Ist A ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit ($P(A) > 0$) und $B_1, \ldots, B_n$ eine Zerlegung des Ereignisraums Ω in disjunkte Ereignisse, die alle eine positive Wahrscheinlichkeit haben ($P(B_i) > 0$), so gilt

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)\, P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)\, P(B_k)}.$$

Beweisen Sie diesen Satz.

Aufgabe 5 (mündlich)

Eine Population bestehe zu 47% aus Frauen und zu 53% aus Männern. 4% der Population sind männlich und leiden an Rot-Grün-Blindheit. Des Weiteren sind 3% der Population weibliche Individuen, die an Rot-Grün-Blindheit leiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rot-Grün-blindes Individuum männlich ist?

Aufgabe 6 (mündlich)

Von drei Spielkarten sei eine beidseitig weiß, die zweite beidseitig rot und die dritte auf einer Seite weiß und auf der anderen rot. Die Karten werden gemischt (wobei die Karten auch gedreht, also Ober- und Unterseite vertauscht werden können) und unter ein schwarzes Tuch gelegt. Nach Hervorziehen einer Karte sieht man, dass die oben liegende Seite weiß ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch die untere Seite weiß? Geben Sie zur Beantwortung der Frage den Ereignisraum an.