Dr. Kai Zehmisch
Dipl.-Math. Hella Timmermann

SS 2013

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“

Abgabe: Montag, 13.5.2013, bzw. Dienstag, 14.5.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Geben Sie bei allen Aufgaben die verwendeten Formeln an. Auch diese werden bepunktet.

Aufgabe 1 (schriftlich)

Im Mittel sagt der Wetterbericht für den kommenden Tag zu 60% schönes und zu 40% schlechtes Wetter voraus. Die Trefferquote für die Voraussage „schön“ liegt bei 80%, während die für die Voraussage „schlecht“ bei 90% liegt.

a) Wieviel % schöne Tage gibt es? Gehen Sie bei der Beantwortung der Frage wie folgt vor:

   i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wetter morgen schön ist unter der Voraussetzung, dass der Wetterbericht schönes Wetter vorhergesagt hat?

   ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wetter morgen schön ist unter der Voraussetzung, dass der Wetterbericht schlechtes Wetter vorhergesagt hat?

   iii) Geben Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „morgen ist schönes Wetter“ an.

b) Trotz schönen Wetters erscheint ein Freund von Ihnen nicht zum verabredeten Picknick im Freien, mit dem Hinweis, der gestrige Wetterbericht habe schlechtes Wetter vorausgesagt, so dass er umdisponiert habe. Sie selbst haben den gestrigen Wetterbericht nicht gesehen und möchten berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Aussage Ihres Freundes nur eine Ausrede ist. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

   i) Wie lautet das entsprechende Ereignis (im Hinblick auf die erfolgte Wettervorhersage und das tatsächliche Wetter), dessen Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll?

   ii) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit dem Satz von Bayes.

   Hat ihr Freund eher eine Ausrede benutzt oder die Wahrheit gesagt?

7 Punkte

Aufgabe 2 (schriftlich)

Sie spielen drei Runden des folgenden Spiels: Eine Münze werde geworfen und wenn Kopf erscheint erhalten Sie zwei Euro, wenn Zahl erscheint müssen Sie einen Euro bezahlen. Die Zufallsvariable X gebe den Gewinn nach drei Runden an.

a) Geben Sie den Ereignisraum Ω an, der drei Runden dieses Spiels beschreibt.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in Ω an.

c) Welche Gewinne bzw. Verluste sind nach drei Runden des Spiel möglich und bei welchen Elementen ω aus dem Ereignisraum Ω treten diese Gewinne auf?

d) Geben Sie die Verteilung von X an, das heißt, finden Sie $P(X = k)$ für alle möglichen Gewinne k.

7 Punkte

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 3 (schriftlich)

Ein Test auf eine Krankheit reagiere mit eine Sensitivität von 95% und einer Spezifität von 98%, das bedeutet, es werden 95% der infizierten und 98% der nicht infizierten Personen richtig klassifiziert. Gehen Sie davon aus, dass 0.2% der Bevölkerung infiziert sind.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Test eine zufällig ausgewählte Person als infiziert klassifiziert?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Test eine zufällig ausgewählte Person als nicht infiziert klassifiziert?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich infiziert ist?

d) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis nicht infiziert ist?

e) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit einem negativen Testergebnis auch tatsächlich nicht infiziert ist?

Hinweis: Die Aufgaben 1 und 3 sind alte Klausuraufgaben.

6 Punkte

Aufgabe 4 (mündlich)

Es seien A und B zwei Ereignisse, wobei $P(A) > 0$ sei. Machen Sie sich klar, dass Folgendes gilt:

$$P(B \mid A) = 1 - P(\bar{B} \mid A).$$

Hinweis: Diese Formel dürfen Sie auch auch in den obigen Aufgaben verwenden.

Aufgabe 5 (mündlich)

In der amerikanischen Spielshow „Let's make a deal“ ist als Hauptpreis ein Auto ausgesetzt. Hierzu sind auf der Bühne drei verschlossene Türen aufgebaut. Hinter einer rein zufällig ausgesuchten Tür befindet sich das Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Der Kandidat wählt eine der Türen aus, diese bleibt aber noch geschlossen. Der Spielleiter (der weiß, hinter welcher Tür das Auto steht) öffnet daraufhin eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege verbirgt. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit, sich umzuentscheiden. Wie wahrscheinlich ist es, dass er gewinnt, wenn er die Tür wechselt bzw. wenn er bei seiner Wahl bleibt?

Aufgabe 6 (mündlich)

In einer Schale befinden sich 20 Kirschen, wobei bei 15 Kirschen der Kern entfernt wurde und bei 5 Kirschen der Kern noch vorhanden ist. Ein gieriges Schwein isst fünf Kirschen aus der Schale ohne zu merken, ob in den Kirschen ein Kern war oder nicht. Anschließend wird zufällig eine der übrigen Kirschen aus der Schale entnommen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die entnommene Kirsche einen Kern?

b) Angenommen, die entnommene Kirsche enthält einen Kern. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass das Schwein keinen Kern gefressen hat?

Hinweis: Überlegen Sie sich, inwieweit die Reihenfolge der Ereignisse eine Rolle spielt.