Dr. Kai Zehmisch
Dipl.-Math. Hella Timmermann

SS 2013

## 8. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“

Abgabe: Montag, 10.6.2013, bzw. Dienstag, 11.6.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

**Geben Sie bei allen Aufgaben die verwendeten Formeln an. Auch diese werden bepunktet.**

### Aufgabe 1 (schriftlich)

Im Rahmen einer Studie ist geplant, die auf einer Untersuchungsfläche bestimmter Größe befindlichen Eintagsfliegenlarven zu zählen. Die Anzahl $X$ der Larven auf dieser Untersuchungsfläche sei gegeben durch

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \text{falls } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine solche Verteilung heißt *Poisson-Verteilung mit Erwartungswert* $\lambda$. Nehmen Sie an, dass $\lambda = 6$ ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Larven auf der Untersuchungsfläche befinden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich keine Larve auf der Untersuchungsfläche befindet?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich keine oder eine Larve auf der Untersuchungsfläche befindet?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mehr als drei Larven auf der Untersuchungsfläche befinden?

**6 Punkte**

### Aufgabe 2 (schriftlich)

In einem Wurf Mäuse leiden 5 unter Vitamin A Mangel. Sie werden daraufhin mit einer gewissen Menge Karotten gefüttert. Die Wahrscheinlichkeit für die Genesung eines Tieres liegt bei $p = 0,73$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau drei der fünf Mäuse gesund?

**3 Punkte**

### Aufgabe 3 (schriftlich)

Drei Reisende besteigen unabhängig voneinander einen leeren Zug mit drei nummerierten Wagen, wobei sich jeder Reisende rein zufällig für einen der drei Wagen entscheidet. Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die Anzahl der Reisenden im ersten Wagen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0, 1, 2, 3 Reisende im ersten Wagen sitzen?

b) Sie wetten mit einem Freund, wie viele Reisende im ersten Waagen sitzen. Welchen Tipp sollte man abgeben und warum?

c) Angenommen, Sie erhalten einen Euro, wenn Sie die obige Wette gewinnen und müssen einen Euro zahlen, falls Sie die Wette verlieren. Welchen Wetteinsatz wären Sie bereit dafür zu leisten?

**5 Punkte**

[BITTE WENDEN]

**Aufgabe 4 (schriftlich)**

Nachdem Sie in der Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“ viel über die Wahrscheinlichkeitsrechnung gelernt haben, träumen Sie vom ganz großen Geld, das Sie sich mithilfe von Pokerturnieren verdienen wollen. Bevor Sie sich jedoch tatsächlich dazu entschließen, eine „professionelle“ Pokerlaufbahn einzuschlagen, wollen Sie zunächst Ihre Gewinnwahrscheinlichkeiten berechnen. Sie gehen dabei von dem folgenden vereinfachenden Modell aus.

> Sie spielen mehrere Pokerturniere, und da Sie sich nicht mit „Peanuts“ herumschlagen wollen, zählt für Sie nur der komplette Turniergewinn. Es gibt für Sie also nur Turniersieg oder Turnierniederlage.
>
> An einem Pokerturnier nehmen jeweils 10 Personen teil (Sie inklusive). Da es sich jeweils um professionelle Spieler handelt, die alle ungefähr gleich gut pokern können, nehmen Sie an, dass in jedem Turnier jeder Spieler die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit besitzt.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Sie allgemein bei $n$ Turnieren insgesamt $x$-mal gewinnen (Formelangabe).

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Sie bei 6 Turnieren insgesamt 3 mal gewinnen.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass Sie bei 18 Turnieren insgesamt 8 mal gewinnen.

d) Wie viele Turniere müssen Sie spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens ein Turnier zu gewinnen?

**6 Punkte**

## Die hypergeometrische Verteilung

Nehmen wir an wir haben $N$ Objekte (zum Beispiel Kolbenhubpipetten) gegeben, wobei insgesamt $m$ Stück dieser Objekte ein besonderes Merkmal haben (z.B. einen Fehler). Diese speziellen Objekte, die ein zu den anderen Objekten abweichendes Merkmal aufweisen, bilden demnach einen Anteil von $p = \frac{m}{N}$ der Gesamtmenge. Nacheinander werden jetzt $n$ Objekte ausgewählt, die jeweils nach ihrer Prüfung wieder zurückgelegt werden. Auf diese Weise erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass $k$ fehlerhafte Teile auftreten, den Wert

$$\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k.$$

Anders ist es jedoch, wenn man die $n$ Teile nicht zurücklegt. In diesem Fall kann die Wahrscheinlichkeit, $k$ fehlerhafte Teile zu finden durch

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ermittelt werden. Abstrakt lässt sich das wie folgt zusammenfassen:

Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Anzahl der aus einer Menge $M$ gezogenen Objekte vom Typ $A$ bei der zufälligen Ziehung (ohne Zurücklegen) von $n$ Kombinationen aus $M$. Mit $E = \{X = k\}$ sei das Ereignis bezeichnet, das alle möglichen Kombinationen von $n$ vielen Objekten umfasst, die aus insgesamt $k$ Objekten vom Typ $A$ und $(n - k)$ Objekten eines anderen Typs bestehen. Insgesamt seien $m$ Objekte vom

Typ $A$ und $N - m$ Objekte eines anderen Typs vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E$ ist dann durch

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

gegeben. Eine solche Zufallsvariable wird als *hypergeometrisch* verteilt mit Parametern $N$, $n$ und $p = \frac{m}{N}$ bezeichnet.

### Aufgabe 4 (mündlich)

Rückfangmethoden werden angewendet, um die Größe $N$ einer Population zu schätzen. Im einfachsten Fall werden aus der Population $M$ Individuen eingefangen, markiert und wieder freigelassen. Nachdem sich die markierten Individuen mit der übrigen Population vermischt haben, wird eine zweite Stichprobe von $n$ Individuen entnommen und festgestellt, wie groß die Anzahl $m$ der darunter befindlichen markierten Individuen ist. Man schätzt nun die Größe $N$ der Population, indem man davon ausgeht, dass der Anteil der markierten Individuen in der zweiten Stichprobe etwa dem Anteil aller markierten Individuen an der Gesamtpopulation entspricht, also

$$\frac{M}{N} \approx \frac{m}{n}.$$

a) Nehmen Sie nun an, dass Sie bei der ersten Stichprobe 100 Individuen gefangen haben. Bei der zweiten Stichprobe fangen Sie 20 Individuen, von denen 4 markiert sind. Wie groß schätzen Sie aufgrund dieser Daten die Gesamtpopulation ein?

Nehmen Sie nun an, dass die Population aus 500 Individuen bestehe, von denen 100 markiert seien. Bei Ihrer zweiten Stichprobe fangen Sie 20 Individuen ein.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei der zweiten Stichprobe genau 4 markierte Individuen fangen (und somit Ihre Schätzung für $N$ tatsächlich exakt ist)?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei der zweiten Stichprobe 3, 4 oder 5 markierte Individuen fangen?

### Aufgabe 5 (mündlich)

Schauen Sie sich erneut Aufgabe 2 von Blatt 7 an. Diesmal werde das Experiment so durchgeführt, dass die Ratten nicht zurückgesetzt werden nachdem sie eine Portion Futter erhalten haben. Es werden wieder 10 Wiederholungen durchgeführt, es werden also zuerst eine aus zwanzig Ratten, dann eine weitere Ratte aus den verbliebenen 19 Ratten ausgewählt, bis man schließlich 10 Ratten ausgewählt hat.

a) Es sei wieder $Y$ die Anzahl der Portionen an Futter, das Freddie nach 10-maliger Durchführung erhalten hat. Geben Sie die Verteilung von $Y$ an.

b) Nehmen Sie an, dass in dem Käfig 10 graue, 4 schwarze und 6 weiße Ratten sitzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach dem oben beschriebenen 10-maligen „Ziehen“ genau 2 schwarze und 8 nicht-schwarze Ratten gefüttert zu haben?