Dr. Kai Zehmisch
Dipl.-Math. Hella Timmermann

SS 2013

9. Übungsblatt zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Biologie“

Abgabe: Montag, 17.6.2013, bzw. Dienstag, 18.6.2013, jeweils in Ihrer Übungsgruppe

Geben Sie bei allen Aufgaben die verwendeten Formeln an. Auch diese werden bepunktet. Runden Sie Ihre Ergebnisse (wenn nötig) auf die fünfte Nachkommestelle.

Aufgabe 1 (schriftlich)

Für eine Versuchsreihe stehen Ihnen 40 Testobjekte zur Verfügung, von denen allerdings 10 ungeeignet sind. Vor Beginn der Versuchsreihe können Sie nicht erkennen, welche Objekte ungeeignet sind. Es sei X die Anzahl der ungeeigneten Versuchsobjekte in einer zufälligen Auswahl von m Objekten ($m = 0, \ldots, 40$).

a) Geben Sie die Verteilung von X an. (Formelangabe)

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich bei einer Auswahl von 15 Versuchsobjekten genau 3 ungeeignete befinden?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich bei einer Auswahl von 10 Versuchsobjekten darunter mindestens ein ungeeignetes befindet?

d) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich bei einer Auswahl von 5 Versuchsobjekten nur ungeeignete darunter befinden?

6 Punkte

Aufgabe 2 (schriftlich)

Es sei X eine auf $[a, b]$ rechteckverteilte Zufallsvariable (wobei $a < b$ sei), das heißt X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie eine mögliche Interpretation für X an.

b) Skizzieren Sie die Dichtefunktion $f(x)$.

c) Es sei $a < c < d < b$. Berechnen Sie $P(c \leq X \leq d)$.

d) Berechnen Sie $P(X \geq b)$ und $P(X \leq b)$.

e) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

8 Punkte

Aufgabe 3 (schriftlich)

Zeigen Sie, dass für eine stetig verteilte Zufallsvariable X und beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass $P(X = a) = 0$ ist.

2 Punkte

[BITTE WENDEN]

Aufgabe 4 (schriftlich)

Eine Sicherheitsvorrichtung in einem Labor schlägt Alarm falls sie mehr als 5 radioaktive Artikel innerhalb einer Sekunde misst. Es sei die Hintergrundstrahlung so, dass die Anzahl der Partikel, die das Gerät erreichen Poisson-verteilt ist mit Erwartungswert 0.5. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Alarm innerhalb eines 1-sekündigen Zeitintervalls losgeht? Geben Sie bei Ihrer Rechnung auch die zu betrachtende Zufallsvariable und deren Verteilung an.

4 Punkte

Aufgabe 5 (mündlich)

Handelt es sich bei den folgenden Funktionen um Wahrscheinlichkeitsdichten einer stetigen Zufallsvariablen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $f_1(x) = 1$

b) $f_2(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty \leq x < a \\ \frac{1}{a-b} & \text{für } a \leq x < b \\ 0 & \text{für } b \leq x \end{cases} \qquad \text{mit } a < b$

d) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{7+x^8}{x^8} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

e) $f_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{7}{x^8} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Aufgabe 6 (mündlich)

Eine Bakterienpopulation wird zum Zeitpunkt $t = 1$ mit einem Gift kontaminiert. Die Zufallsvairable X beschreibe den Zeitpunkt, zu dem ein Organismus nach der Kontaminierung stirbt, wobei die zugehörige Dichtefunktion gegeben sei durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{für } t \geq 1, \\ 0 & \text{für } t < 1. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Organismus zum Zeitpunkt $t = 5$ noch lebt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Überlebenszeit des Organismus nach der Kontaminierung 1 bis 5 Zeiteinheiten beträgt.

c) Skizzieren Sie die Dichtefunktion $f(t)$ und die in Teil (a) und (b) berechneten Wahrscheinlichkeiten.

d) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.