SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie: In einem Hausdorff-Raum sind die einpunktigen Teilmengen abgeschlossen.

(b) Sei $M = \mathbb{R} \cup \{*\}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathbb{R}$ und einem Punkt. Konstruieren Sie eine lokal zu $\mathbb{R}$ homöomorphe Topologie auf M, die nicht Hausdorffsch ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $[x]$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$ im Quotientenraum $X/\sim$ aller solcher Äquivalenzklassen. Mit $\pi\colon X \to X/\sim$ sei die Quotientenabbildung $x \mapsto [x]$ bezeichnet. Eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ heißt **offen in der Quotiententopologie** genau dann, falls $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X.

(c1) Ist der Quotientenraum $X/\sim$ Hausdorffsch, so sind die Äquivalenzklassen $[x] \subset X$ abgeschlossen.

(c2) Es seien zwei Äquivalenzrelationen $\sim_1$ und $\sim_2$ auf $\mathbb{R}^2$ durch Angabe ihrer Äquivalenzklassen definiert: Auf $\mathbb{R}^2 \setminus (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ seien diese für beide Relationen durch vertikale affine Geraden gegeben; auf dem Komplement $(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ durch die Kurven, die durch alle möglichen Verschiebungen der Graphen der Funktionen $x \mapsto \tan x$ für $\sim_1$ bzw. $x \mapsto x \tan x$ für $\sim_2$ in vertikale Richtung entstehen. Welcher der beiden Quotientenräume ist Hausdorffsch?

Aufgabe 2. Es sei S^n die Menge aller Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie: Die beiden Atlanten $\big(h^\pm, S^n \setminus \{(0,\dots,0,\pm 1)\}\big)$ und $(h_i^\pm, U_i^\pm)$, $i = 1,\dots,n+1$, gegeben durch die stereographischen Projektionen an Nord- und Südpol einerseits und Projektionen aus den positiven und negativen offenen Halbräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die zugehörigen berandenten Koordinatenhyperebenen andererseits, sind kompatibel.

Aufgabe 3. Das kartesische Produkt zweier glatter Mannigfaltigkeiten hat in natürlicher Weise eine glatte Struktur, die nur von den Strukturen der Faktoren abhängt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ (siehe Analysis III) eine Mannigfaltigkeit ist.

Abgabe: Donnerstag 12.04.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317