SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei D ein dichter Unterraum des normierten Raumes X, Y ein Banachraum und $T\colon D \to Y$ ein linearer beschränkter Operator. Konstruieren Sie eine normgleiche stetige Fortsetzung $\hat{T}\colon X \to Y$ von T, d.h. es gelte $\hat{T}|_D = T$ und $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

Aufgabe 2. Seien X und Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ ein linearer beschränkter Operator. Der Operator T ist **kompakt**, wenn das Bild der Einheitskugel in X unter T relativ-kompakt ist. Zeigen Sie:

(a) Hat T endlich-dimensionales Bild, so ist T kompakt.

(b) Sei $T_n\colon X \to Y$ eine Folge kompakter Operatoren mit $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. Dann ist T kompakt.

Aufgabe 3. Für $t \in \mathbb{R}$ sei ein Operator $K^t\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ durch $(K^t u)_\xi := \big(1 + |\xi|^2\big)^t u_\xi$ erklärt. Zeigen Sie:

(a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist K^t eine Isometrie $H_s \to H_{s-2t}$ mit Inverser K^{-t}.

(b) Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $u, v \in H_s$ gilt $\langle u, v\rangle_s = \langle u, K^t v\rangle_{s-t} = \langle K^t u, v\rangle_{s-t}$.

(c) $K^t(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$

(d) Für alle $\varphi \in \mathcal{P}$ und $\ell = 0, 1, 2, \dots$ gilt

$$K^\ell \varphi = \big(1 + \Delta\big)^\ell \varphi$$

für den standard Laplace-Operator $\Delta = -\big(\partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2\big)$ auf $\mathbb{R}^n$.

(e) Für $u \in H_{s+t}$ gilt

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{v \in H_{s-t}, v \neq 0} \frac{|\langle u, v\rangle_s|}{\|v\|_{s-t}} .$$

Aufgabe 4. Seien $t_1 < s < t_2$ und $a, \varepsilon > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $1 \leq a^{t_2 - s} + \left(\frac{1}{a}\right)^{s - t_1}$

(b) **Peter-Paul Ungleichung:** Für alle $u \in H_{t_2}$ gilt

$$\|u\|_s^2 \leq \varepsilon \|u\|_{t_2}^2 + c(\varepsilon)\|u\|_{t_1}^2$$

mit $c(\varepsilon) = \varepsilon^{(t_1 - s)/(t_2 - s)}$.

Abgabe: Donnerstag 14.06.12
14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317