SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $L = \sum_{[\alpha]\leq \ell} A_\alpha D^\alpha$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung ℓ auf $\mathcal{P}$. Der **formal adjungierte** Operator L^* ist durch $\langle L\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, L^*\psi\rangle$ für all $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$ definiert. Zeigen Sie, daß L^* ebenfalls elliptisch ist. Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für Operatoren L auf $C^\infty(U, \mathbb{C}^m)$ für offene Teilmenen U des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. Ein periodischer Differentialoperator hat **Träger** in einer offenen Menge Ω mit $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset Q$, falls die Koeffizienten aus $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^m) \subset \mathcal{P}$ sind. Zwei verallgemeinerte Funktionen $u, v \in H_s$ **simmen** auf Ω **überein**, falls $\langle u - v, \varphi\rangle_0 = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^m)$ gilt.

Zeigen Sie $Lu = Lv$ für alle periodischen Differenzialoperatoren L mit Träger in Ω und alle $u, v \in H_s$, die auf Ω übereinstimmen. *Hinweis:* Benutzen Sie Blatt 10 Aufgabe 3(e).

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler orientierter reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, welches wir auch als Metrik bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) Durch $\langle \alpha, \beta\rangle = \alpha(b)$ wird eine Metrik auf V^* definiert, wobei $b \in V$ eindeutig durch $\langle\,.\,, b\rangle = \beta$ bestimmt ist.

(b) Durch bilineare Fortsetzung von

$$\big\langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k \big\rangle = \det\big(\langle \alpha_i, \beta_j\rangle\big)$$

erhalten wir eine Metrik auf $\Lambda^k V^*$.

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von Lemma 3.2, daß für das in (b) eingeführte Skalarprodukt $\langle \omega, \sigma\rangle = *(\omega \wedge *\sigma)$ gilt für alle k-Formen ω und σ. Folgeren Sie, daß der Stern-Operator, definiert durch

$$*(\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k}) = \varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_{n-k}}$$

falls

$$\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_k} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_{n-k}} > 0$$

für eine positiv orientierte ON-Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, nur von der Orientierung, nicht aber von der gewählten ON-Basis abhängig ist.

(d) Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine positiv orientierte Basis von V^*. Dann gilt

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = \sqrt{g}\, \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n,$$

mit $g = \det(g_{ij})$ und $g_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j\rangle$. (Zeigen Sie diese mit Folgerung 3.5 identische Aussage direkt!)

Aufgabe 4. Welche der Operatoren

$$\Delta^2 \qquad \text{auf} \quad C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ ,$$

$$\Delta + \partial_t \ , \quad \Delta + \partial_t^2 \ , \quad \Delta - \partial_t^2 \qquad \text{auf} \quad C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \ ,$$

$$\bar{\partial} \qquad \text{auf} \quad C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^m)$$

sind elliptisch?

Abgabe: Donnerstag 21.06.12
14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317