SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei L ein elliptischer Differentialoperator auf $\mathcal{P}$ und f_ν eine Folge, die in $\mathcal{P}$ gegen 0 konvergiert, d.h. $\|f_\nu\|_{C^k} \longrightarrow 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei u_ν eine Folge in $\mathcal{P}$ von Lösungen von $Lu_\nu = f_\nu$, die in H_0 gegen 0 konvergiert. Zeigen Sie

$$\|u_\nu\|_{C^k} \longrightarrow 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Sei $P_\ell(\xi)$ das Hauptsymbol eines elliptischen periodischen Differentialoperators. Zeigen Sie: Es gibt positive Konstanten c, C, so daß für alle $(x, \xi, v) \in T^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt:

$$c\|\xi\|^\ell \|v\| \leq |P_\ell(\xi)(x) \cdot v| \leq C\|\xi\|^\ell \|v\| \ ,$$

wobei $\|\xi\|$ und $\|v\|$ die Euklidischen Normen bezeichnen. Kann man die Periodizität dabei weglassen?

Aufgabe 3. Sei V ein endlich-dimensionaler orientierter reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\, . \,,\, . \,\rangle$. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine positiv orientierte Basis von V^* und

$$g = \det(g_{ij}) \qquad \text{und} \qquad g_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \ .$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von Blatt 11 Aufgabe 3, wie zum Beispiel

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{g}} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \ ,$$

und durch eine geeignete Wahl einer ON-Basis:

$$*\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} g_{1j} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_j \wedge \ldots \wedge \alpha_n \ .$$

Beweisen Sie

$$*\big(\alpha_1 \wedge \alpha_2\big) = \frac{1}{g_{11}\sqrt{g}} \sum_{\substack{j_1 \neq j_2 \\ 2 \leq j_2}} \operatorname{sgn}(\sigma)\ g_{1j_1} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{1j_2} & g_{2j_2} \end{vmatrix} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \alpha_n \ ,$$

wobei σ die Permutation $(j_1 j_2 1 \ldots \hat{j}_1 \ldots \hat{j}_2 \ldots n)$ ist. Finden Sie einen Entwicklungssatz durch geeignete Kofaktoren für $*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)$, indem Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ anwenden.

Aufgabe 4. Zeigen Sie (43), d.h. zeigen Sie: für einen periodischen Differentialoperator L der Ordnung ℓ gibt es eine positive Konstante c, so daß

$$\left| \left\langle L(f^2 u), Lu \right\rangle_s - \left\| L(fu) \right\|_s^2 \right| \leq c \|u\|_{s+\ell} \|u\|_{s+\ell-1}$$

gilt für alle $f \in C^\infty(T^n, \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{Z}$ und $u \in H_{s+\ell}$.

Abgabe: Donnerstag 28.06.12
14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317