SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

# Geometrische Analysis

Übungsblatt 13

Ein beschränkter Operator $T\colon\ X \to Y$ zwischen Banachräumen heißt **semi-Fredholmoperator**, wenn sein Kern endlich-dimensional und sein Bild abgeschlossen ist. Ein semi-Fredholmoperator $T\colon\ X \to Y$ heißt **Fredholmoperator**, falls sein Kokern

$$\operatorname{Koker} T = Y/T(X)$$

endlichdimensional ist. Der **Index** eines Fredholmoperators $T$ ist

$$\dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Koker} T\ .$$

**Aufgabe 1.** Seien $T\colon\ X \to Y$ ein beschränkter und $K\colon\ X \to Z$ ein kompakter Operator für Banachräume $X$, $Y$ und $Z$. Sei $c > 0$ eine Konstante, so daß für alle $x \in X$ die a priori Abschätzung

$$\|x\| \le c\big(\|Tx\| + \|Kx\|\big)$$

gilt. Zeigen Sie: $T$ ist ein semi-Fredholmoperator.

*Hinweis:* Um die Abgeschlossenheit des Bildes von $T$ zu beweisen, nehmen Sie zuerst an, daß $T$ injektiv ist und argumentieren Sie dann analog zur a priori Abschätzung in (13). Bilden Sie im allgemeinen Fall eine Banachraumquotienten oder benutzen Sie den Satz von Hahn-Banach.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist der Operator

$$\begin{aligned} T\colon\ H_t &\longrightarrow \big(H_{-t}\big)' \\ u &\longmapsto \langle u,\, .\,\rangle_0 \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus.
*Hinweis:* Benutzen sie Blatt 10 Aufgabe 3 (e) und den Satz von Fréchet-Riesz.

**Aufgabe 3.** Sei $L$ ein elliptischer Differentialoperator auf $\mathcal{P}$ der Ordnung $\ell$.

(a) Dann sind

$$L, L^*\colon\ H_s \to H_{s-\ell}$$

semi-Fredholmoperatoren für alle $s \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{Ker} L \subset \mathcal{P}$ und $\operatorname{Ker} L^* \subset \mathcal{P}$.

(b) Es gibt kanonische isometrische Isomorphismen $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Koker} L^*$ und $\operatorname{Ker} L^* = \operatorname{Koker} L$, d.h. $L$ und $L^*$ sind Fredholmoperatoren mit Index

$$\dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Ker} L^*\ ,$$

welcher unabhängig von $s \in \mathbb{Z}$ ist.

*Hinweis:* Benutzen sie Lemma 3.27 und Aufgabe 2.

**Aufgabe 4.** Sei $L$ ein elliptischer Differentialoperator auf $\mathcal{P}$ der Ordnung $\ell$.

(a) Es gilt die **Fredholm'sche Alternative**

$$H_{s-\ell} = L\big(H_s\big) \oplus \operatorname{Ker} L^*$$

für alle $s \in \mathbb{Z}$, wobei die direkte Summenzerlegung bzgl. dem $H_0$-Skalarprodukt orthogonal ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie dazu die **Green'sche Formel**

$$\langle Lu, v\rangle_0 = \langle u, L^*v\rangle_0 \qquad \text{für alle} \quad u \in H_s, v \in H_{\ell-s} \;,$$

welche auch für nicht elliptische Operatoren $L$ gilt, und benutzen Sie den Satz von Hahn-Banach.

(b) Für eine glatte periodische Funktion $f \in \mathcal{P}$ hat das lineare elliptische Problem $Lu = f$ genau dann eine glatte Lösung $u \in \mathcal{P}$, wenn $f$ orthogonal auf $\operatorname{Ker} L^*$ bzgl. dem $H_0$-Skalarprodukt steht.

**Bonusaufgabe.** Beweisen oder widerlegen Sie: Alles hat ein Ende nur die Wurst hat zwei.

Abgabe: Donnerstag 05.07.12
14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317