SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $M \times N$ das Produkt zweier glatter Mannigfaltigkeiten M, N, versehen mit der natürlichen glatten Struktur.

(a) Für jeden Punkt $(p, q) \in M \times N$ gilt: $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \times T_qN$.

(b) Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung und $F\colon M \to M \times N$ die durch $F(p) = \big(p, f(p)\big)$ definierte Abbildung.

(b1) Die Abbildung F ist glatt, und es gilt $T_pF(X) = \big(X, T_pf(X)\big)$ für $p \in M$, $X \in T_pM$.

(b2) Der Tangentialraum an den Graphen von f im Punkt $\big(p, f(p)\big)$ ist der Graph der Abbildung $T_pf\colon T_pM \to T_{f(p)}N$.

Aufgabe 2.

(a) Eine Vektorfeld X auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist glatt genau dann, wenn in jedem Koordinatensystem $(U; x_1, \ldots, x_m)$ auf M gilt, daß $X\,|_U = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit Funktionen $a_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \ldots, m$.

(b) Ein Vektorfeld X ist glatt genau dann, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset M$ und jedes $f \in C^\infty(U)$ gilt, daß die Funktion Xf auf U glatt ist.

Aufgabe 3. Das Tangentialbündel TM einer glatten m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **trivial** (und M **parallelisierbar**), falls es einen Diffeomorphismus $TM \to M \times \mathbb{R}^m$ gibt, der T_pM linear auf $\{p\} \times \mathbb{R}^m$ abbildet für jedes $p \in M$.

(a) TM ist trivial genau dann, wenn es m Vektorfelder $X_1, \ldots, X_m$ auf M gibt, so daß die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ linear unabhängig sind für jedes $p \in M$.

(b) $T\mathbb{R}^m$, TS^1 und TS^3 sind trivial.

(c) Geben Sie eine nicht parallelisierbare Mannigfaltigkeit an.

Aufgabe 4. Seine A_1 und A_2 disjunkte abgeschlossene Teilmengen der glatten Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es eine glatte Funktion $\varphi\colon\ M \to [0, 1]$, die auf A_1 verschwindet und auf A_2 konstant den Wert 1 annimmt. Insbesondere gibt es disjunkte offene Umgebungen von A_1 und A_2, d.h. M ist **normal**.

Bonusaufgabe. Eine stetige Abbildung $f\colon\ M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist glatt genau dann, wenn $g \circ f \in C^\infty(M)$ gilt für jede Funktion $g \in C^\infty(N)$.

Abgabe: Donnerstag 12.04.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317