SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Sei $\omega\colon V\times\ldots\times V\to\mathbb{R}$ eine k-multilineare Abbildung auf einem reellen Vektorraum V. Dann sind äquivalent:

(a) ω ist alternierend,

(b) $\omega(v_1,\ldots,v_k)=-\omega(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$ für $i<j$,

(c) $\omega(v_1,\ldots,v_k)=0$ für linear abhängige Vektoren $v_1,\ldots,v_k\in V$,

(d) $\omega(v_1,\ldots,v_k)=0$ für Vektoren $v_1,\ldots,v_k\in V$, wobei mindestens zwei der v_j gleich sind.

Zeigen Sie darüberhinaus, daß $\mathrm{id}^*=\mathrm{id}$ und $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$ für lineare Abbildungen $f\colon V\to W$ und $g\colon U\to V$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $v\in V$. Die **innere Multiplikation** mit v ist ein Endomorphismus auf der äußeren Algebra ΛV^* vom Grad -1, der durch

$$\begin{array}{rccc} i_v\colon & \Lambda^k V^* & \longrightarrow & \Lambda^{k-1}V^* \\ & \omega & \longmapsto & i_v\omega \end{array}$$

definiert wird, wobei

$$i_v\omega(v_2,\ldots,v_k):=\omega(v,v_2,\ldots,v_k)$$

für alle $v_2,\ldots,v_k\in V$. Zeigen Sie, daß i_v eine **Antiderivation** ist, d.h. daß für $\omega\in\Lambda^k V^*$ und $\sigma\in\Lambda^\ell V^*$ stets

$$i_v(\omega\wedge\sigma)=i_v\omega\wedge\sigma+(-1)^k\omega\wedge i_v\sigma$$

gilt.

Aufgabe 3.

(a) Vergleichen Sie das Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit dem äußeren Produkt zweier geeigneter 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$. Kann man das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ in einer ähnlichen Weise darstellen?

(b) Die 1-Formen $\omega_1,\ldots,\omega_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_k\neq 0$.

(c) **Cartan-Lemma:** Seien $\omega_1,\ldots,\omega_k$ linear unabhängige 1-Formen auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Seien $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ 1-Formen auf V für die

$$\omega_1\wedge\sigma_1+\ldots+\omega_k\wedge\sigma_k=0$$

gilt. Dann gibt es reelle Zahlen $a_{ij}=a_{ji}$ mit $\sigma_i=\sum_{j=1}^k a_{ij}\omega_j$ für alle i.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

(a) Jede $(n-1)$-Form ω auf V ist **zerlegbar**, d.h. es gibt 1-Formen $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ auf V mit $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1}$.

(b) Für eine 2-Form ω auf V ist der **Rang** die eindeutig bestimmte natürliche Zahl r mit $\omega^r \neq 0$ (hier ist ω^r die r-fache äußere Potenz von ω) aber $\omega^{r+1} = 0$. Ist ω eine solche 2-Form vom Rang r, dann gibt es eine Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ von V^* mit $\omega = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{2r-1} \wedge \varepsilon_{2r}$.

Hat ω den Rang $n/2$, so heißt ω auch eine **symplektische From**.

Bonusaufgabe. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k-dimensionale Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ und glatte Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-k} \colon U \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

(i) $M \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$ und

(ii) der Rang der Jacobischen $J_f(a)$ zu $(f_1, \ldots, f_{n-k}) \colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gleich $n-k$ ist.

Zeigen Sie:

(a) (ii) ist äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von $\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_{n-k}(a)$, bzw. zu

$$df_1(a) \wedge \ldots \wedge df_{n-k}(a) \neq 0$$

(b) und M ist eine Mannigfaltigkeit.

Abgabe: Donnerstag 26.04.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317