SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

# Geometrische Analysis

Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** Sei $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum.

(a) Ist $n \leq 3$, dann ist jede $k$-Form auf $V$ zerlegbar (vgl. Aufgabe 4 Blatt 4). Geben Sie ein Beispiel einer nicht-zerlegbaren $k$-Form für $n = 4$ an.

(b) Sei $\alpha$ eine 1-Form auf $V$. Die **äußere Multiplikation** mit $\alpha$ ist ein Endomorphismus auf der äußeren Algebra $\Lambda V^*$ vom Grad 1, der durch

$$\begin{array}{rccc} e(\alpha)\colon & \Lambda^k V^* & \longrightarrow & \Lambda^{k+1} V^* \\ & \omega & \longmapsto & \alpha \wedge \omega \end{array}$$

definiert wird. Zeigen Sie, daß diese äußere Multiplikation eine exakte Sequenz

$$\Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{k+1} V^* \longrightarrow \Lambda^{k+2} V^*$$

induziert, falls $\alpha \neq 0$.

**Aufgabe 2.** Geben Sie auf der 2-Sphäre ein Vektorfeld mit genau zwei Nullstellen an. Geben Sie auf der 2-Sphäre ein Vektorfeld mit genau einer Nullstelle an.

**Aufgabe 3.** Eine **symplektische Form** auf einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $W$ ist eine 2-Form $\omega$ auf $W$, die **geschlossen** (d.h. $d\omega = 0$) und **nicht-degeneriert** (d.h. $\omega_p^n$ ist eine Volumenform auf $T_pW$ für alle $p \in W$) ist.

(a) Berechnen Sie die Liouvillesche Form $\lambda$ und und ihr Differential $d\lambda$ auf $T^*\mathbb{R}^n$.

(b) Für alle glatten Mannigfaltigkeiten $Q$ ist das Differential $\omega = d\lambda$ der Liouvilleschen Form $\lambda$ auf $T^*Q$ symplektisch.

(c) Zeigen Sie, das durch $i_Y\omega = \lambda$ eindeutig ein glattes Vektorfeld $Y$ auf $T^*Q$ definiert ist, wobei $i_Y\omega$ die innere Multiplikation $\omega(Y, .)$ bezeichne, welche punktweise wie in Aufgabe 2 Blatt 4 erklärte ist.

(d) Wie sieht $Y$ in lokalen Koordinaten aus?

**Aufgabe 4.** Sei $U$ ein topologischer Raum und $f\colon U \to \mathbb{R}^{n \times k}$ eine matrixwertige Funktion. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F\colon & U \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (u, x) & \longmapsto & f(u) \cdot x \end{array}$$

genau dann stetig is, wenn $f$ stetig ist. Formulieren und beweisen sie die analoge Aussage für glatte Abbildungen.

**Bonusaufgabe.**

(a) Geben Sie ein Beispiel einer nicht-trivialen reellen Algebra an, die nur die Nullabbildung als Derivation zuläßt.

(b) Sei $F$ eine kommutative reelle Algebra, die keine nilpotenten Elemente vom Grad 2 hat. Dabei heißt ein Element $f \in F$ **nilpotent vom Grad** 2, falls $f^2 = 0$ gilt.

Zeigen Sie, daß der Raum der Derivationen auf $F$ trivial ist, d.h. $\mathcal{D}(F) = \{0\}$ gilt, falls die Lie-Klammer auf $\mathcal{D}(F)$ identisch verschwindet.

(c) Kann man die Annahme über die nilpotenten Elemente vom Grad 2 in (b) weglassen?

Abgabe: Donnerstag 03.05.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317