SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Der Totalraum des Tangentialbündels jeder Mannigfaltigkeit ist orientierbar.

Aufgabe 2.

(a) Für glatte Vektorfelder X, Y sei die **Lie-Klammer** $[X, Y]$ punktweise durch $X_pY - Y_pX$ im Sinne der Derivationen erklärt. Zeigen Sie, daß $[X, Y]$ ein glattes Vektorfeld ist.

(b) Ist zusätzlich ω eine 1-Form, dann gilt: $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega\big([X, Y]\big)$. Zeigen Sie dazu zuerst, daß die rechte Seite eine 2-Form definiert und rechnen Sie dann lokal (und möglichst einfach!) die Behauptung nach.

(c) Zeigen Sie analog:

$$\begin{aligned} d\omega\big(X_1, \ldots, X_{k+1}\big) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega\big(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}\big) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}\big) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

(a) Sei σ eine glatte $(m-1)$-Form mit kompaktem Träger auf der orientierten m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Dann gilt $\int_M d\sigma = 0$.

(b) Die m-te deRham-Kohomologie einer kompakten orientierbaren m-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist nicht-trivial.

(c) $H^1_{\mathrm{dR}}\big((0,1)\big)$ ist trivial.

Aufgabe 4. Für eine Überdeckung $M = U \cup V$ einer Mannigfaltigkeit duch offene Teilmengen U, V seien folgende Abbildungen

$$\begin{aligned} \iota^* \colon \Omega^*(M) &\longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \\ \omega &\longmapsto \big(\omega|_U, \omega|_V\big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \kappa^* \colon \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) &\longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \tau|_{U\cap V} - \sigma|_{U\cap V} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie mittels einer untergeordneten Zerlegung der Eins $\{\varphi_U, \varphi_V\}$, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

exakt ist.

(b) Zeigen Sie direkt, daß dadurch die sogenannte **Mayer-Vietoris Sequenz**

$$\cdots \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(M) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M) \longrightarrow \cdots$$

induziert wird und diese ebenfalls exakt ist. Dabei ist der Korandoperator

$$\begin{array}{rccc} d^*\colon & H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) & \longrightarrow & H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M) \\ & [\omega] & \longmapsto & [\tau] \end{array}$$

über die Form τ gegeben, die auf U gleich $-d(\varphi_V \omega)$ und auf V gleich $d(\varphi_U \omega)$ ist.

Bonusaufgabe.

(a) Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, dann ist

$$\begin{array}{rccc} f^*\colon & H^k_{\mathrm{dR}}(N) & \longrightarrow & H^k_{\mathrm{dR}}(M) \\ & [\omega] & \longmapsto & [f^*\omega] \end{array}$$

wohldefiniert.

(b) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \wedge\colon & H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^\ell_{\mathrm{dR}}(M) & \longrightarrow & H^{k+\ell}_{\mathrm{dR}}(M) \\ & \big([\omega_1], [\omega_2]\big) & \longmapsto & [\omega_1 \wedge \omega_2] \end{array}$$

ist wohldefiniert.

Abgabe: Donnerstag 10.05.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317