SS 2012 Dr. Kai Zehmisch

Geometrische Analysis

Übungsblatt 7

Bitte beachten Sie die nicht-kanonische Abgabezeit aufgrund des Feiertages!

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie

$$*\Delta = \Delta * \qquad d\Delta = \Delta d \qquad \delta\Delta = \Delta\delta$$

(b) Zeigen Sie

$$d(\omega \wedge *\sigma) = d\omega \wedge *\sigma - \omega \wedge *\delta\sigma$$

für alle $(k-1)$-Formen ω und k-Formen σ.

(c) Untersuchen Sie den Stern-Operator auf $\Lambda^k(V^*)$ für einen $2k$-dimensionalen reellen Vektorraum V.

Aufgabe 2. Berechnen Sie $H^k_{\mathrm{dR}}(S^1)$ mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie $H^k_{\mathrm{dR}}(T^n)$ mit Hilfe des Satzes von Hodge für alle $k \in \mathbb{Z}$, wobei $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ den n-dimensionalen Torus bezeichne.

Aufgabe 4. Seien $A\colon U \to V$ und $B\colon V \to W$ lineare Abbildungen endlich-dimensionaler reeller Euklidischer Vektorräume, so daß die Sequenz

$$BA\colon U \longrightarrow V \longrightarrow W$$

exakt ist. Zeigen Sie, daß

$$B^*B + AA^*\colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus ist, wobei A^* und B^* die adjungierten Operatoren zu A bzw. B bezeichnen.

Abgabe: Donnerstag 24.05.12

14:00 Uhr bei Frau Kuhlmann im Zimmer 317